CORSO
DI
MATEMATICHE

PARTE TERZA.

SEZIONE SECONDA.

CORSO
DI
MATEMATICHE,

PER USO

DELLE GUARDIE-MARINA;

DEL SIG.r BEZOUT, DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE, ESAMINATORE DELLE GUARDIE-MARINA, DEGLI ALLIEVI E DEGLI ASPIRANTI DEL CORPO DI ARTIGLIERIA, E CENSORE DEI LIBRI.

PARTE TERZA,

Che contiene l' Algebra, e la sua applicazione all' Aritmetica, ed alla Geometria.

Tradotta dal Francese (sull' ediz. di Parigi del 1798), per ordine di S. M. (*D.G.*); da GAETANO FRANCHINI Professore di Geometria Sublime nel 1.° Collegio della Reale Accademia di Marina; per uso di questa.

SEZIONE SECONDA.

NAPOLI,
DALLA REAL TIPOGRAFIA DELLA GUERRA.
1828.

TAVOLA
DELLE MATERIE.

DELL' ALGEBRA.

SEZIONE SECONDA.

DELL' ALGEBRA.

SEZIONE SECONDA,

Nella quale vien tale Scienza applicata all'Aritmetica, ed alla Geometria.

230. Nel piccol numero di applicazioni recato nella Sezion precedente, si è dovuto osservare, che quando un problema è stato posto in equazione, ciò che rimane a fare per terminar di risolverlo, è uniforme per tutti li problemi dello stesso grado. Tutto riducesi a disviluppar l'incognita, o le incognite; e ciò fassi con regole che son sempre le stesse, sien differenti quanto mai possano essere le grandezze, che debbon considerarsi in ciascun problema, e differenti quanto mai esser possano questi problemi medesimi, purchè sien dello stesso grado.

Queste regole esentano da moltissimi ragionamenti, che si dovrebber fare se si volesse tralasciare il soccorso delle equazioni; ragionamenti, che oltre del loro numero, per lor natura sarebbero ancora al di là degli ordinarj sforzi dello spirito.

Si è fatto con alcuni esempj anche presentire, quanto mai era vantaggioso di rappresentar con segni generali, tanto ciascuna delle grandezze che entrano in un problema, quanto le operazioni da farsi sulle stesse; ma oltre dei vantaggi, che si è veduto risultar da un tal metodo, ve n'è anche un altro gran numero che si farà conoscere nell' esporre le equazioni sotto di un aspetto molto più esteso di quello esibito finora.

Allor che si è rappresentata in un modo generale ciascuna delle grandezze, sien cognite, sieno incognite, che entrano in un problema, e che tutte le condizioni in esso contenute, sonosi espresse con equazioni; allor puossi totalmente perder di vista il problema, per occuparsi unicamente di tali equazioni, coll' applicarvi le competenti regole. Allor se si ha ben presente allo spirito ciò ch'è convenuto di capire, sia per i segni, sia per la disposizione delle lettere; ciascuna equazione

diviene come un libro, in cui molto più facilmente possonsi leggere i differenti rapporti che avvincono le grandezze tra loro. Con differenti applicazioni delle regole esposte nella prima Sezione, possonsi a tali equazioni recar delle nuove forme, che rendon questi rapporti anche più facili a capirsi. In una parola, possonsi esse considerare come il deposito delle proprietà di tali grandezze, e delle generali soluzioni di un gran numero di problemi, che non si eran nè pure immaginati, e che non mai poteva supporsi spettar sì da vicino al principale problema.

In fatti, poichè le regole che servono a determinare i valori delle incognite, son tutte dirette a formare di ciascuna incognita sola il primo membro di un' equazione, il cui secondo membro venga composto da tutte le altre grandezze; e che tali regole sono evidentemente applicabili a ciascuna delle grandezze, che entrano in tali equazioni: perciò è chiaro, che colle stesse regole si può sempre pervenire ad aver sola in un membro, una qualunque delle grandezze che entrano in una equazione, con aver tutte le altre nel secondo membro. Allora si è nel caso, come se dovesse risolversi il problema nel quale le

cognite erano tutte queste ultime, e quella sola l'incognita. Vedesi dunque, che una stessa equazione risolve tanti differenti problemi, quante sono le differenti grandezze, che essa contiene. Rendasi ciò manifesto con alcuni esempj.

Generali proprietà delle progressioni aritmetiche.

231. Si è veduto (*Arit.* 206.), che un qualunque termine di una progressione aritmetica crescente, era composto dal primo, aggiuntavi tante volte la comun differenza, quanti erano i termini che 'l precedevano.

Se dunque con a si rappresenti il valor numerico del primo termine; con u quello del termine da determinarsi; con d la comun differenza, o sia la ragione della progressione; e finalmente con n il numero di tutt' i termini; in tal caso il numero dei termini che precedono il termine u, sarà espresso da $n-1$; e l'esposta proposizione potrà esprimersi algebricamente, con questa equazione $u=a+(n-1)d$, la qual risolve il problema di determinare l'ultimo termine di una progressione aritmetica, di cui sien dati il ter-

mine primo a, il numero n di tutt' i termini, e la comun differenza d.

Ma poichè in tale equazione vi han luogo quattro grandezze, perciò si farà osservare che essa risolve quattro problemi generali. In fatti,

1.° Se si supponga essere a l' incognita di cui cercasi il valore, seguendo le regole della prima Sezione, si avrà $a=u-(n-1)d$, lo che ne dimostra che il primo termine di una progressione aritmetica crescente si ritrova togliendo dall' ultimo u, la differenza d presa $n-1$ volte, cioè presa tante volte, quanto è il numero di tutt' i termini, diminuito di 1.

2.° Se si riguardi n come incognita, l'equazione $u=a+(n-1)d$, o sia $u=a+nd-d$, trasponendo ne dà, $nd=u-a+d$, e dividendo, $n=\frac{u-a+d}{d}=\frac{u-a}{d}+1$; cioè essa ne indica, che dàndosi i termini primo ed ultimo di una progressione aritmetica, e la ragione di essa, che abbiasi il numero di tutt' i termini togliendo dall' ultimo il primo, dividendo tal residuo per la ragione, ed aggiungendo una unità a questo quoto. Per esempio, se di una progressione aritmetica sap-

piansi essere 5 il primo termine, 37 l'ultimo, e 2 la ragione; il numero di tutt' i termini di tal progressione sarà $\frac{37-5}{2}+1=\frac{32}{2}+1$ $=16+1=17$.

3.° Finalmente, se nell' equazione $u=a+(n-1)d$, si consideri d come incognita, trasponendo e dividendo, si avrà $d=\frac{u-a}{n-1}$, cioè sen deduce, che si conosce la ragione di una progressione aritmetica di cui sien dati i termini primo ed ultimo; e'l numero di tutt' i termini, col dividere per tal numero diminuito di una unità, l'eccesso dell'ultimo sul primo. Questa regola riducesi a quella stabilita (*Arit.* 209), per ritrovare un dato numero di medie proporzionali tra due date grandezze. In fatti, ivi si è detto, che bisognava dalla maggiore toglier la minore, e dividere il residuo pel numero delle medie accresciuto di una unità, lo che è chiaramente lo stesso, poichè il numero delle medie è due unità di meno del numero di tutt' i termini della progressione.

Dunque la sola equazione $u=a+(n-1)d$, ne offre il risolvimento di quattro problemi generali; cioè dà il modo di risolvere il se-

guente, che li comprende tutti quattro. Date tre di queste quattro cose, il numero dei termini di una progressione aritmetica, il primo e l'ultimo di essi, e la comun differenza dei medesimi; determinare la quarta.

232. Ogni altra proprietà generale, anche enunciata in un modo generale, ne condurrà similmente al risolvimento di altrettanti differenti problemi, quante saranno le grandezze che avran luogo nella sua enunciazione.

Per esempio, è anche una proprietà delle progressioni aritmetiche, che *per aver la somma di tutt' i termini di una qualunque progressione aritmetica, bisogna sommare il primo di essi coll' ultimo, e moltiplicare il risultato per la metà del numero dei termini.*

Così per aver la somma dei primi cento termini della progressione $\div$ 1, 3, 5, 7, ec. di cui il centesimo è 199: a quest'ultimo 199 aggiungerassi il primo 1, e 'l risultato 200 si moltiplicherà per la metà 50 del numero 100 dei termini; e si avrà così 10000, per la somma dei primi cento numeri impari.

Si dimostrerà in un momento tal proprietà; ma per non perder di veduta l' attuale oggetto, se conservando lo stesso superior linguaggio, chiamisi di più *s* la somma di tut-

t'i termini; l' espressione analitica di questa proprietà sarà $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$.

Quest'equazione pone in istato di risolvere il seguente problema generale, che ne comprende quattro. *Date tre delle quattro cose, il numero di tutt' i termini di una progressione aritmetica, la somma di essi, e 'l primo e l'ultimo dei medesimi; trovar la quarta.*

In fatti, 1.° se son noti a, u, ed n, l' indicata equazione esibisce all' istante il valor di s. 2.° Se son dati a, u, ed s, per aversi n, si toglierà il divisore 2, e si avrà $2s = (a + u) \times n$; e dividendo per $a + u$, sarà $n = \frac{2s}{a+u}$. 3.° e 4.° Se si sanno a, s, ed n, o pure u, s ed n, e che si cerca u o pure a; si riprenderà l'equazione $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, togliendo la frazione, si ha $2s = (a + u) \times n$; dividendo per n, risulta $a + u = \frac{2s}{n}$, da cui si ha $u = \frac{2s}{n} - a$, che soddisfa al primo problema; ed $a = \frac{2s}{n} - u$, che soddisfa al secondo.

Ora si dimostrerà la supposta proprietà.

É chiaro che se si seguita a chiamare a il primo termine, e d la comun differenza,

qualunque progressione aritmetica crescente si può rappresentar colla seguente $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d$, ec. Concepiscasi, che sotto di questa progressione, facciasi corrispondere termine per termine essa medesima, ma in ordine inverso, si avrà ....

$$\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d$$

$$\div a + 6d . a + 5d . a + 4d . a + 3d . a + 2d . a + d . a$$

Come queste due progressioni sono uguali, così è chiaro che la somma dei termini di una di esse, è metà della somma di tutte due; or se vi si fa attenzione, vedesi che i due termini corrispondenti fanno, e debbon sempre fare una medesima somma, e che questa è quella del primo e dell'ultimo termine di una di esse; dunque la totalità delle due progressioni si troverà sommando il primo e l'ultimo termine di una di esse, e moltiplicando un tal risultato pel numero dei termini; dunque la somma dei termini di una sola di queste progressioni, si ottien sommando il primo e l' ultimo, e moltiplicando questo risultato per la metà del numero dei termini.

233. Gli otto problemi generali, che ora so-

nosi risoluti, tendon solo a due principj, cioè, a quello che si è enunciato (231), ed all'altro enunciato (232). E poichè la soluzione di essi rilevasi immediatamente dalle due equazioni, che sono l'algebrica traduzione di queste due enunciazioni, vedesi come coll'ajuto dell' Algebra possonsi da uno stesso principio dedurre tutte le verità, che ne dipendono.

Benchè tutte queste proprietà non sono ugualmente utili, per altro come esse son semplici, così sono molto più proprie a ben dimostrare l' uso delle equazioni. Per tal motivo si continuerà ad esporre quest'uso, prendendole ancora per esempio.

In ciò che sin quì si è esposto, si è considerata una sola equazione per volta. Ma se due o più equazioni, che esprimono differenti proprietà di certe grandezze, trovansi aver di comune alcune di queste, allora con somma facilità può dedursene un molto maggior numero di altre proprietà. Per esempio le due equazioni fondamentali delle progressioni aritmetiche, cioè $u = a + (n - 1) d$, ed $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, han di comune le tre grandezze a, u, ed n. Se in ciascuna di queste due equazioni prendesi successivamen-

te il valore di qualunque di queste tre grandezze, ed indi si pareggiano questi due valori, si avrà una nuova equazione nella quale non più vi sarà tal grandezza, e che senza l'ajuto di questa, esprimerà il rapporto che serban tra loro le altre quattro. Per esempio, se in ciascuna equazione prendesi il valor di a, si avrà $a = u - (n - 1) d$, ed $a = \frac{2s}{n} - u$; dunque pareggiando, si avrà $u - (n - 1) d = \frac{2s}{n} - u$, della quale equazione considerando u, n, d, ed s successivamente per incognite, si rileveranno, come di sopra, quattro nuove proprietà generali delle progressioni aritmetiche. Per esempio, considerando s come incognita, si rileverà $s = \frac{2nu - n.(n-1)d}{2}$, cioè che si può determinare la somma di una progressione aritmetica, per mezzo del numero dei termini, dell'ultimo di essi, e della comun differenza; poichè di queste grandezze, e di numeri cogniti consta il secondo membro di tale equazione.

Se in vece di eliminare a, si fosse eliminata u, o n, per ciascuna eliminazione si sarebbe similmente ottenuta una nuova equazione, che avrebbe contenuto quattro delle cinque

grandezze a , u , n , d , s : e considerando successivamente ciascuna di queste quattro grandezze come incognita, si rileveranno da ciascuna nuova equazione quattro nuove formole, che sono altrettante differenti espressioni delle grandezze a , u , n , d , s; delle quali espressioni ciascuna serba la sua particolare utilità, secondochè nel problema, che si proporrà relativamente alle progressioni aritmetiche, sarà nota questa o quest' altra di tali grandezze. Per esempio, se si cercherà la somma di tutt' i termini di nna progressione aritmetica, di cui sien dati il primo di essi, il numero di tutti, e la comun differenza; in tal caso, essendo incognito l' ultimo termine, si eliminerà u, e si avrà un'equazione che contenendo solamente a, n, d, ed s, farà conoscere facilmente s.

Da ciò conchiudesi, che le due equazioni

$u = a + (n - 1) d$, ed $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ offrono la risoluzione di tutti li problemi, che posson proporsi sulle progressioni aritmetiche, quando conosconsi tre delle cinque grandezze a , u , n , d , s.

Esibiscansi quì alcune applicazioni delle *progressioni aritmetiche*.

234. Suppongasi che si cerchi quante palle di cannone contenga la base di un mucchio triangolare di queste, il lato del quale sia di sei.

Facilmente si vede 1.°, che il numero delle palle di ciascuna striscia parallela al lato che s'inclina sulla terra, il qual ne contiene sei, (*fig.* 2), va diminuendo continuamente di 1, e riducesi finalmente ad 1. 2.° Che il numero delle strisce è sei. Dunque trattasi di trovar la somma dei termini di una progressione aritmetica di cui il primo è 1, 6 l'ultimo, e 6 il numero dei termini. Sommasi dunque il primo 1 coll'ultimo 6, e 'l risultato 7 si moltiplica per 3 metà del numero dei termini, lo che ne dà 21 pel numero delle palle della base del mucchio.

235. Si è veduto in Geometria, che la superficie di un trapezio ottiensi moltiplicando la semisomma dei suoi lati paralleli, per l'altezza di esso. Una tal proposizione può dimostrarsi coi principj ora stabiliti per sommare una progressione aritmetica. In fatti, può concepirsi il trapezio $ABDC$ (*fig.* 3) come composto da un infinito numero di trapezj infinitamente piccoli, come $bcih$, $cdki$. Ora facilmente si vede, che supponendo tutti questi piccoli trapezj della stessa altezza, ciascun differisce dal suo vicino, sempre di una stessa grandezza, cioè del piccolo parallelogrammo $cefg$, col menare ce e bf parallele ad hk; poichè $gfki$ è uguale a $bgih$, e cde è uguale a bcg, in modo che il trapezio $cdki$ supera l'altro $bcih$, di quanto è il piccolo parallelogrammo $cefg$, il quale sarà sempre dell'istesso spazio, se supporransi questi trapezj sempre della stessa altezza. Avverandosi ciò ne deriva, che tutti questi trapezj costituiscono una progressione

aritmetica, il cui primo termine è il trapezio contiguo ad AB, e l' ultimo è il trapezio contiguo a CD; dunque per aver la totalità di questi trapezj, cioè la superficie del trapezio $ABDC$, bisogna riunire i due trapezietti estremi, e moltiplicarli per la metà del numero di essi; ma come sonosi supposti infinitamente piccoli, così in vece dei due trapezj estremi, possonsi prender le due linee AB e CD; e pel numero dei trapezj, può prendersi l'altezza IH; bisogna dunque moltiplicare la somma delle due linee AB e CD, per la metà dell'altezza IH, o pure la semisomma di quelle linee, per tutta quest' altezza. Donde rilevasi, che se AB è zero, in qual caso il trapezio degenera in triangolo, bisogna moltiplicar la base di questo, per la metà della sua altezza, lo che si accorda perfettamente con ciò che si è dimostrato in Geometria.

Del modo di sommar le potenze dei termini di una qualunque progressione Aritmetica.

236. Or si è veduto che 'l principio stabilito per sommare i termini di una progressione aritmetica aver può alcune applicazioni in Geometria. Esso può averne anche in varie altre occasioni. Per esempio, esso è il cardine del modo di sommare i quadrati, i cubi, ec. dei termini di una progressione aritmetica; e 'l modo di sommar tali potenze è ben anche utile. Vadasi un poco ad occupar di questo. Ma

prima è opportuno di far osservare, che quando proponesi di sommare una serie di grandezze, che crescono o decrescono con una legge conosciuta; l'oggetto è di determinar la somma di tali grandezze, posto che sappiasi alcuna di esse, il numero delle medesime, e la grandezza che esprime la legge del loro aumento, o della loro diminuzione.

Per isnodar questo problema, si può come per tutti gli altri, fare uso del principio stabilito (67). Ma come questo principio suppone che se sappiasi la grandezza, che si cerca, siasi nello stato di verificarla, lo che non può farsi senza conoscere almeno alcune delle sue proprietà; così dunque si tenti di trovar le proprietà delle serie dei quadrati, dei cubi, ec. dei numeri in progressione aritmetica.

Sien dunque a, b, c, d, ec. più numeri in progressione aritmetica, dei quali sia r la differenza. Si avrà 1.°, $b=a+r$, $c=b+r$, $d=c+r$, $e=d+r$.

2.° Elevando a quadrato, tali equazioni, si avrà

$$b^2=a^2+2ar+r^2,$$
$$c^2=b^2+2br+r^2,$$
$$d^2=c^2+2cr+r^2,$$
$$e^2=d^2+2dr+r^2.$$

3.° E facendo i cubi delle medesime, si otterrà

$$b^3 = a^3 + 3\,a^2\,r + 3\,a\,r^2 + r^3,$$
$$c^3 = b^3 + 3\,b^2\,r + 3\,b\,r^2 + r^3,$$
$$d^3 = c^3 + 3\,c^2\,r + 3\,c\,r^2 + r^3,$$
$$e^3 = d^3 + 3\,d^2\,r + 3\,d\,r^2 + r^3.$$

Ora se sommansi tra esse le equazioni dei quadrati, ed anche tra esse quelle dei cubi; dopo di aver soppresso i termini uguali e simili, che troveransi nei due membri, si avrà 1.° $e^2 = a^2 + 2\,a\,r + 2\,b\,r + 2\,c\,r + 2\,d\,r + 4\,r^2$, o sia $e^2 = a^2 + 2\,r\,(a + b + c + d) + 4\,r^2$; e vedesi, che se il numero delle grandezze a, b, c, d, ec. sia generalmente espresso con n, l'ultima di esse con u, e la somma delle medesime con s', si avrà $u^2 = a^2 + 2\,r\,(s' - u) + (n - 1)\,r^2$, perchè $2\,r$ è moltiplicata per tutte le grandezze a, b, c, ec., eccetto l'ultima, ed r^2 è presa tante volte, quante sono le equazioni, o sia tante volte meno una, quante son le grandezze a, b, c, ec. E poichè tale equazione contiene s', perciò facilmente se ne rileva il valor di questa, e conseguentemente l'espressione della somma di tutt' i termini di una progressione aritmetica. Tal valore di s' è $s' = \frac{u^2 - a^2 - (n-1)\,r^2}{2\,r} + u$.

2.° Se similmente si sommano le equazioni dei cubi, dopo di aver soppresso le grandezze uguali e simili, che trovansi nei due membri, si avrà $e^3 = a^3 + 3\,a^2\,r + 3\,b^2\,r + 3\,c^2\,r + 3\,d^2\,r + 3\,a\,r^2 + 3\,b\,r^2 + 3\,c\,r^2 + 3\,d\,r^2 + 4\,r^3$.

Cioè $e^3 = a^3 + 3\,r\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3\,r^2\,(a + b + c + d) + 4\,r^3$, ove si vede, che la grandezza, che moltiplica $3\,r$ è la somma di tutt' i quadrati eccetto l' ultimo; che la grandezza, che moltiplica $3r^2$ è la somma di tutte le grandezze eccetto l'ultima, e che finalmente il cubo r^3 è preso tante volte, quante sono le equazioni, cioè tante volte meno una, quante son le grandezze; per cui chiamando s'' la somma dei quadrati, u l'ultimo termine, si avrà generalmente $u^3 = a^3 + 3\,r\,(s'' - u^2) + 3\,r^2\,(s' - u) + (n-1)\,r^3$.

Dunque conoscendo il primo termine, l'ultimo, la differenza r, e'l numero dei termini, per mezzo di quest' equazione, si potrà avere il valore di s'', cioè della somma dei quadrati, perchè la grandezza s' è stata di sopra determinata. Se dunque si sostituisce per s' il suo valore, si avrà $u^3 = a^3 + 3\,r.$
$(s'' - u^2) + 3\,r\left(\frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2}\right) + (n-1)\,r^3$,

o sia $2u^3 = 2a^3 + 6rs'' - 6ru^2 + 3ru^2 - 3ra^2 - 3(n-1)r^3 + 2(n-1)r^3$, da cui colle solite operazioni, si ha $s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1)r^3}{6r}$.

Se si fan similmente le quarte potenze delle equazioni $b = a + r$, $c = b + r$, ec., che si sommano, e che si trattano dell' istesso modo, si troverà in simil guisa la somma dei cubi. Si procederà anche così per trovar la somma delle potenze più elevate.

237. Diansi ora alcune applicazioni della somma dei quadrati.

Se si suppone, che la progressione aritmetica di cui trattasi, è la serie naturale dei numeri, cominciando dall' unità, cioè 1, 2, 3, ec.

Allor sarà $a = 1$, $r = 1$, ed $u = n$; perchè in generale $u = a + (n-1)r$, che nel caso attuale diviene $u = 1 + n - 1 = n$. Dunque il valore di s'' sarà $s'' = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6}$, cioè $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$
$= n \times \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} = n \times \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

Suppongasi ora di voler sapere, quante palle di cannone contenga un mucchio quadrato, di cui cono-

scasi il numero delle palle di un dei lati della base. È chiaro, che un tal mucchio è composto di strati paralleli alla base, che son tutti quadrati il cui lato va continuamente diminuendo di 1, a contar dalla base stessa; o pur crescendo di 1, contando dal vertice. Dunque la totalità è la somma dei quadrati della serie naturale dei numeri, presa fino al numero n, che indica il numero delle palle di un dei lati della base; per cui questa totalità è espressa da $\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$; cioè, che per ottenerla, bisogna seguir questa regola. *Il numero delle palle di un dei lati della base, esso stesso accresciuto di 1, e'l doppio di esso anche accresciuto di 1, si moltiplichino tutti tra essi; e'l prodotto di questi tre fattori, dividasi per 6, o sia se ne prenda il sesto.* Per esempio, se il mucchio quadrangolare ha il lato di 6 palle, in tal caso il numero di tutte le palle in esso contenute, sarà espresso da $\frac{6.(6+1).(12+1)}{6}$, o sia da $\frac{6.7.13}{6}$, o pure da 7.13, cioè da 91.

Quando il mucchio non ha per base un quadrato, ma un parallelogrammo, bisogna concepirlo diviso in due parti (*fig.* 4.), di cui una è il mucchio quadrangolare ora esposto, e l'altra è un prisma di cui si valuterà la totalità delle palle, moltiplicando il numero delle palle contenute nel triangolo *FBG*, pel numero delle palle contenute in *BC*. In riguardo al numero delle palle contenute nel triangolo *BGF*, esso si avrà moltiplicando la metà del numero delle palle

del lato FG, per lo stesso numero accresciuto di 1.

235. Si è veduto in Geometria, che per aver la solidità di una piramide, o di un qualunque cono, bisogna moltiplicar la superficie della base pel terzo dell'altezza. Or tale verità può anche dimostrarsi colla formola della somma dei quadrati. Ma bisogna prima osservare, che se nella formola $s'' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ supponesi, che il numero n dei termini è infinito, essa riducesi ad $s'' = \frac{n^3}{3}$, o pure ad $s'' = \frac{u^2 n}{3} = u^2 . \frac{n}{3}$, per essersi già dimostrato di sopra $u' = n$. In fatti, nel supporre che n è infinita, ciò porta per conseguenza che essa non può ricevere aumento da una grandezza finita: così affinchè il calcolo esprime una tal supposizione, bisogna riguardar necessariamente, che $n+1$ è lo stesso di n, e che $2n+1$ è lo stesso di $2n$, ed in tal caso la formola $s'' = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$, riducesi ad $s'' = \frac{n.n.2n}{6} = \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3} = n^2 . \frac{n}{3} = u^2 . \frac{n}{3}$, sostituendo in n^2 in vece di n il suo valore u.

Ciò posto, si è dimostrato (*Geom.* 202.), che considerando una piramide come composta di fette parallele alla base, queste saran tra esse come i quadrati delle rispettive distanze St dal vertice (*fig.* 5.); dunque considerando l'altezza divisa in un infinito numero di parti uguali, le anzidette distanze seguiranno la progressione naturale dei numeri, e le fette quella dei quadrati di essi; dunque la somma delle fette si troverà nell'istesso modo, che quella dei quadrati: or la

formola $s'' = u^2 . \frac{n}{3}$ dinota, che bisogna moltiplicar l' ultimo dei quadrati, pel terzo del numero di essi; dunque per aver la somma delle fette, bisogna moltiplicarne l' ultima, cioè la base, pel terzo del numero di esse, cioè pel terzo dell' altezza.

239. Se vuolsi avere la formola generale per la sommazione delle potenze dei termini di una qualunque progressione aritmetica bisogna osservare, che si avrà in generale..................................

$$e^m = d^m + m d^{m-1} r + m . \frac{m-1}{2} d^{m-2} r^2 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} d^{m-3} r^3 + \text{ec.}$$

$$d^m = c^m + m c^{m-1} r + m . \frac{m-1}{2} c^{m-2} r^2 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} c^{m-3} r^3 + \text{ec.}$$

$$c^m = b^m + m b^{m-1} r + m . \frac{m-1}{2} b^{m-2} r^2 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} b^{m-3} r^3 + \text{ec.}$$

$$b^m = a^m + m a^{m-1} r + m . \frac{m-1}{2} a^{m-2} r^2 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} a^{m-3} r^3 + \text{ec.}$$

dunque sommando, riducendo, e rappresentando con st^{m-1}, st^{m-2}, st^{m-3}, ec, la somma delle potenze $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec. di tutti i termini e con u l' ultimo termine, si avrà in generale

$$u^m = a^m + mr (st^{m-1} - u^{m-1}) + m . \frac{m-1}{2} r^2 . (st^{m-2} - u^{m-2}) + \text{ec.}$$

da qual cosa rilevasi, che supponendo successivamente $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, ec. si avranno le formole della sommazione di tutte le potenze. Poichè supponendo $m = 1$, si ha $u = a + r\ (st^0 - u^0)$; ora $st^0 = s^1$, cioè alla somma di tante unità, quanti sono i termini, ed $u^0 = 1$. In qual modo in vece di $st^0 - u^0$, può prendersi $n - 1$. Supponendo $m = 2$, si ha $u^2 = a^2 + 2\ r\ (st - u) + r^2\ (st^0 - u^0)$, che darà st poichè si sa il valore di $st.^0$ Supponendo $m = 3$, si avrà $u^3 = a^3 + 3\ r\ (st^2 - u^2) + 3\ r^2\ (st - u) + r^3\ (st^0 - u^0)$, che darà st^2, poichè si sanno st, ed $st.^0$ Finalmente, se supponesi $m = 4$, si avrà $u^4 = a^4 + 4\ r\ (st^3 - u^3) + 6\ r^2\ (st^2 - u^2) + 4\ r^3\ (st - u) + r^4\ (st^0 - u^0)$, che darà st^3, perchè son note st^2, st, ed st^0, e così successivamente all'infinito.

240. Quando una volta si sa trovar la somma delle potenze di più numeri in progressione aritmetica, è cosa molto facile di trovar quella di una infinità di altre specie di progressioni. Per esempio, se avendosi una qualunque progressione aritmetica ÷ 3. 7. 11. 15. 19. cc., si immagina, che se ne sommano successivamente i termini, si formerà la serie 3, 10, 21, 36, 55, ec., che può sommarsi. E se di questa anche si sommano i termini, si avrà la serie 3, 13, 34, 70, 125, ec., che può parimente sommarsi; lo stesso avverrà dei termini di questa, se sommansi in pari guisa, e così all' infinito.

In fatti, la somma dei termini della progressione aritmetica è $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, o sia $s = [\ (2\ a + r.\ (n - 1)\ ] \times \frac{n}{2}$, se in vece di u sostituiscesi il suo valore $u = a + r.\ (n - 1)$. Dunque questo valor

di s esprime un qualunque termine della seconda serie. Sicchè per aver la somma dei termini della seconda serie, bisogna sommar la serie delle grandezze, che si ottengono da $[2a + r . (n - 1)] . \frac{n}{2}$, sostituendo successivamente per n tutti i numeri della progressione naturale 1, 2, 3, ec. Or questa grandezza riducesi ad $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, nella quale a ed r restando sempre le stesse, qualunque siasi il valore, che si dà ad n è chiaro, che per sommare tutte le grandezze espresse da an, basta di sommar quelle dinotate da n, ed indi moltiplicare una tal somma per a; ora la somma delle grandezze espresse da n, è la somma della progressione aritmetica dei numeri naturali. Il ragionamento è lo stesso per $\frac{r}{2}n$. In riguardo ad $\frac{r}{2}n^2$, poichè r rimane la stessa qualunque sia il numero, che si sostituisce per n, perciò si sommeranno tutte le grandezze espresse da n^2, cioè si prenderà la somma dei quadrati dei numeri naturali, e si moltiplicherà per $\frac{r}{2}$. Così per la somma delle grandezze an, si avrà $a . (n + 1) . \frac{n}{2}$; per quella delle grandezze $\frac{r}{2}n$, si avrà $\frac{r}{2} . (n + 1) . \frac{n}{2}$; e per quella delle grandezze $\frac{r}{2}n^2$, si avrà $\frac{r}{2} . \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$; in modo che la somma delle grandezze $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, o sia la somma dei termini della seconda serie, sarà

$a.(n+1).\frac{n}{2}+\frac{r}{2}.\frac{2n^3+3n^2+n}{6}-\frac{r}{2}(n+1).\frac{n}{2}$, che riducesi ad $a.(n+1.).\frac{n}{2}+r.\frac{(n-1).n.(n+1)}{6}$; e poichè ciascun termine della terza serie è la somma dei termini della seconda, perciò la terza serie si sommerà col sommare le differenti parti di quest' ultimo risultato, il quale esigerà anche le sommazioni delle potenze della serie naturale dei numeri, e così all' infinito. Se supponesi $a=1$, ed $r=1$, cioè se la progressione primitiva è la serie dei numeri naturali, le progressioni di cui trattasi attualmente, divengono in tal caso ciò che chiamasi *i numeri figurati*. Per mezzo di quest' ultima formola appunto, puossi ritrovare il numero delle palle di un mucchio triangolare; e come in tal caso si ha $a=1$, ed $r=1$, così essa riducesi ad $n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$.

Similmente posson sommarsi le serie, che si formerebbero, riunendo nello stesso modo la serie dei quadrati o quella dei cubi, ec. In una parola, nell' istesso modo può sommarsi ogni serie di grandezze, della quale un qualunque termine sarà espresso da quante vorransi potenze perfette di uno stesso numero n, essendo di più tali potenze moltiplicate da qual si vogliano numeri cogniti.

Le Proprietà e gli usi delle Progressioni geometriche.

241. Con un metodo analogo a quello, che si è impiegato per sommar le potenze dei termini di una progressione aritmetica, può anche trovarsi la somma dei termini di una progressione geometrica.

Suppongasi, che a, b, c, d, e, ec. sieno i termini consecutivi di una progressione geometrica crescente, la cui ragione sia q. Poichè ciascun termine contiene q volte il precedente, perciò avransi le seguenti equazioni $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, ec.; le quali sommate, esibiranno $b + c + d + e = (a + b + c + d) q$, nella quale equazione generalmente vedesi, che il primo membro sarà sempre la somma di tutt' i termini, eccetto il primo, ed il secondo sempre la quantità q moltiplicata per la somma di tutt' i termini, eccetto l' ultimo. Dunque se chiamasi s la somma di tutt' i termini, ed u l' ultimo, una tale equazione si muterà in $s - a = (s-u)\, q = qs - qu$, da cui si ha $qu - a = qs - s = (q - 1)\, s$; e quindi $s = \frac{qu-a}{q-1}$, colla qual formola si ha la somma di tutt' i

termini, se sansi il primo è l'ultimo di essi, e la ragione.

La stessa formola può anche servire per le progressioni decrescenti, perchè queste prese in ordine contrario, divengono crescenti; converrà solamente però chiamar *primo termine*, l'*ultimo*, ed all' opposto.

Se la progressione decrescente si estendesse all' infinito, allor la formola della somma si ridurrebbe ad $s = \frac{qu}{q-1}$, dinotandosi con u il primo termine. In fatti, in questa specie di progressioni, essendo infinitamente piccolo l' ultimo termine, esso togliendosi da qu, non ne altera il valore; e perciò $qu-a$ equivale alla sola grandezza qu.

Vedesi dunque, che *per aver la somma di tutt' i termini di una progressione geometrica, bisogna moltiplicare il massimo termine, per la ragione* (*) *della progressione, da tal prodotto toglierne il minimo, e dividere il residuo per la ragione diminuita di*

(*) In generale intendesi per *ragione* il quoto di un qualunque termine della progressione, diviso per l' immediatamente minore; dal che si comprende, che una tal definizione compete sì alla progression decrescente, che alla crescente.

una unità; in modo che, quando la progressione è decrescente all' infinito, riducesi il tutto a moltiplicare il massimo termine per la ragione, ed indi dividere il prodotto per la ragione diminuita di una unità. Così la somma di questa progressione infinita :: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{16}$: $\frac{1}{32}$, ec. è $\frac{\frac{1}{2} \times 2}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$; lo stesso è della somma dei termini di quest' altra :: $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{9}$: $\frac{2}{27}$: $\frac{2}{81}$, ec., la cui ragione, considerandola come crescente, è 3, poichè $\frac{2}{3}$ diviso per $\frac{2}{9}$, ne dà 3. In fatti la somma dei termini di una tal progressione è $\frac{\frac{2}{3} \times 3}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$. In generale, qualunque progressione geometrica decrescente all' infinito, di cui ciascun termine ha per costante numeratore un numero, che è minore del denominatore del primo termine di essa per una unità, vale 1. Poichè una tal progressione è generalmente espressa per :: $\frac{n}{n+1}$: $\frac{n}{(n+1)^2}$: $\frac{n}{(n+1)^3}$

: $\frac{n}{(n+1)^4}$, ec., la cui somma è $\frac{\frac{n}{n+1}\times(n+1)}{n+1-1}$
$=\frac{n}{n}=1$.

Se una tal conchiusione sembrasse ad alcuno maravigliosa, facciasi attenzione, che se per esempio, dopo di aver preso i $\frac{2}{3}$ della retta AB (*fig.* 6), che supponendosi di 1 piede, prendesi succcessivamente Cd, che sia i due terzi della restante porzione CB, poi i $\frac{2}{3}$ della restante porzione dB, indi i $\frac{2}{3}$ della restante porzione eB, e così all' infinito, non si sarà mai esaurito più di AB. Lo stesso accaderà se prendonsi da principio i tre quarti di AB, poi i $\frac{3}{4}$ di ciò che rimane, e così all' infinito. Or ciò n' esprime la progressione $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, ec., poichè $\frac{2}{9}$ sono i $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{27}$ sono i $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{9}$, e così successivamınte.

242. Si è osservato (*Arit.* 212.), che un qualunque termine di una progressione geometrica, si componeva dal primo moltiplicato per la ragione elevata ad una potenza, il cui grado era disegnato dal numero dei termini precedenti a quello di cui trattavasi. Dunque se chiamasi a il primo termine, u un altro qualunque, n il numero dei termini fino ad

u, e q la ragione, sarà $u = aq^{n-1}$: e come in tale equazione vi han luogo quattro grandezze, così posson dedursene quattro formole, che serviranno a risolvere il seguente general problema. Date tre delle quattro seguenti cose, cioè il numero dei termini di una progressione geometrica, il primo, l'ultimo, e la ragione; trovar la quarta. Poichè 1.° l'equazione esibisce immediatamente il valor di u. 2.° Facilmente si troverà, che $a = \frac{u}{q^{n-1}}$. e 3.° pel (171) risulterà $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Su di che si osserverà, che quest'ultima equazione contiene la regola, che si è fissata in Aritmetica per istabilire quante medie proporzionali si vogliono tra due grandezze date. Tali grandezze qui sono a, ed u. Ma per avere la ragion q, che regnar deve nella progressione, vedesi quì, che bisogna dividere la maggior grandezza u, per la minore a, e dal quoto $\frac{u}{a}$ estrarre la radice del grado $n-1$; ora essendo n il numero di tutti i termini, $n-1$ è maggiore del numero delle medie per una unità; lo che conviene colla citata regola.

Riguardo al modo di avere n nell' equazione $u = aq^{n-1}$, l' Algebra non somministra

mezzi diretti ; ma, può risolverla facilmente, benchè indirettamente, impiegandovi i logaritmi. Si è osservato (*Arit.* 229.) che per elevare ad una potenza per via dei logaritmi, bisognava moltiplicare il logaritmo della grandezza, per l' esponente di tal potenza. Così rappresentando con L l' espressione *Logaritmo di*, in vece di La^2 si potrà prendere $2La$; per La^3, prendere $3La$; per La^n, prendere nLa. Dunque rammentandosi, che per moltiplicare per mezzo dei logaritmi, bisogna sommare i logaritmi dei fattori, e che per dividere bisogna, al contrario, sottrarre dal logaritmo del dividendo, quello del divisore; nell' equazione $u = aq^{n-1}$, $Lu = La + Lq^{n-1} = La + (n-1)\,Lq$; dunque trasponendo, $(n-1)\,Lq = Lu - La$; e dividendo per Lq, $n - 1 = \frac{Lu - La}{Lq}$, e finalmente $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$.

Per esibire qualche applicazione di ciò suppongasi, che siasi impiegata una somma di 60000 lire ad un denaro per ogni venti denari, cioè al cinque per cento con patto, che gli interessi, che in ogni anno produrrà tal somma, sien considerati come un nuovo fondo, che ugualmente produrrà interesse, e così di anno in anno, fin che il fondo sia montato a lire 1000000. Dimandasi quanto dovrà aspettarsi per ottenere quest' ultima somma.

Poichè in questo caso l' interesse è $\frac{1}{20}$ del fondo

dell' anno precedente, al termine di qualunque anno, il fondo sarà uguale a quello dell' anno precedente, più la sua ventesima parte; così se si rappresentano con a, b, c, d, e i successivi fondi di anno in anno, si avrà $b = a + \frac{1}{20} a$, $c = b + \frac{1}{20} b$, $d = c + \frac{1}{20} c$, $e = d + \frac{1}{20} d$; cioè $b = a \times (1 + \frac{1}{20})$, $c = b \times (1 + \frac{1}{20})$, $d = c \times (1 + \frac{1}{20})$, $e = d \times (1 + \frac{1}{20})$; vedesi dunque, che ciascun fondo contiene quello che lo precede, sempre il numero di volte disegnato da $1 + \frac{1}{20}$, o sia da $\frac{21}{20}$. La serie di questi fondi costituisce dunque una progressione geometrica, di cui il primo termine a, è 60000 lire; l' ultimo u, è 1000000 di lire; la ragione q, è $\frac{21}{20}$; e 'l numero dei termini, è incognito. Sicchè questo si troverà sostituendo nella formola $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$, in vece di a, u, e q i valori di esse, lo che darà $n = \frac{L1000000 - L60000}{L\frac{21}{20}}$ $+ 1 = \frac{L1000000 - L60000}{L21 - L20} + 1$, (per essere $L\frac{21}{20} = L21 - L20$); or nelle tavole trovasi $L1000000 = 6,0000000$; $L60000 = 4,7781513$; $L21 = 1,3222193$, $L20 = 1,3010300$; dunque si otterrà $n = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{1,3222193 - 1,3010300} + 1 = \frac{1,2218487}{0,0211893} + 1$

$= 57,7 + 1 = 58,7$, presso a poco; cioè, che il fondo di 60000, monterà a lire 1000000, a capo di 58 anni ed 8 mesi $\frac{1}{2}$ ad un di presso.

Poichè (*Aritm.* 230.) per estrarre, col mezzo dei logaritmi, una radice di un dato grado, bisogna dividere il logaritmo della grandezza, per l'esponente; perciò si può, col mezzo dei logaritmi, risolvere facilmente in numeri, l'equazione $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; perchè si avrà

$$Lq = \frac{L\frac{u}{a}}{n-1} = \frac{Lu - La}{n-1}.$$ Se ciò vuolsi applicare ad un esempio, basterà nel caso precedente ricercare qual dovrà essere l'interesse, affinchè in anni $58\frac{7}{10}$, il fondo di 60060 lire, montasse a quello di lire 1000000. Or qui si ha $a = 60000$, $u = 1000000$, $n = 58, 7$: dunque impiegando i logaritmi delle Tavole, si avrà $Lq =$ $\frac{6,0000000 - 4,7781513}{58,7 - 1} = \frac{1,2218487}{57,7} = 0,0211757$; questo logaritmo corrisponde nelle Tavole, quasi quasi ad 1, 0500, qual numero ridotto in ventesime, ne dà 21, dal che si conchiuderà, che l'interesse quasi quasi è $\frac{1}{20}$.

Da ciò vedesi, come tra due numeri dati, possansi col mezzo dei logaritmi, facilmente frapporre più medie geometricamente proporzionali.

243. L'equazione $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, darà anche

quattro equazioni, che serviranno a risolvere questo problema generale, date tre di queste quattro cose, il primo termine, l' ultimo, la somma, e la ragione di una progressione geometrica, trovar la quarta. Ciò è molto facile presentemente, e non merita il trattenercisi.

Finalmente se da una delle due equazioni $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, ed $u = aq^{n-1}$, si rileva il valore di qualunque delle grandezze a, o q, o u, ec., il quale si sostituisce nell' altra; si avranno le altre equazioni, che possono servire a risolvere il seguente problema, anche più generale; date tre delle cinque cose, il primo termine, l' ultimo, il numero di essi, la ragione, e la somma di una progressione geometrica; trovar ciascuna delle altre due.

Della sommazione delle serie ricorrenti.

244. Chiamansi serie *ricorrenti* quelle, delle quali un qualunque termine si forma coll' addizione di un certo numero di termini precedenti, moltiplicati o divisi per certi numeri determinati, positivi, o negativi. Per esempio, la serie 2, 3, 19, 101, 543, ec., è ricorrente, perchè ciascun termine è formato dai due precedenti, dei quali il primo è moltiplicato per 2, il secondo per 5, dei quali prodotti si fa poi la somma; $543 = 19 \times 2 + 101 \times 5$, similmente $101 = 3 \times 2 + 19 \times 5$.

Tali serie possonsi sommare in un modo analogo a quello impiegato di sopra, basterà esibirne un esempio su di quelle, la cui legge dipende da due sole grandezze, come appunto è quella recata per esempio.

Sien dunque a, b, c, d, e, f, ec. varj termini formati con tal legge, che ciascuno sia composto dalla somma dei due precedenti, dei quali però sia precedentemente il primo moltiplicato per un dato numero m, e 'l secondo per un dato numero p; si avrà dunque questa serie di equazioni: $c = ma + pb$, $d = mb + pc$, $e = mc + pd$, $f = md + pe$, ec. Dunque sommando questa serie di equazioni, si avrà $c + d + e + f +$ ec. $= m(a + b + c + d) + p(b + c + d + e)$; ora il primo membro è la somma di tutti i termini, eccetto i due primi: il moltiplicatore di m, nel secondo membro, è la somma di tutti i termini, eccetto i due ultimi; e finalmente il moltiplicatore di p, è la somma di tutti i termini, eccetto il primo e l' ultimo; dunque chiamando s la somma di tutti i termini, si avrà $s - a - b = m(s - e - f) + p(s - a - f)$, da cui si ricava $s = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1}$, che darà la somma, quando si conosceranno i due primi termini, i due ultimi, e di più le grandezze m, e p.

Si potrebbe anche introdurre nel calcolo il numero dei termini; ma a tal uopo bisognerebbe cercare la generale espressione di un qualunque termine, per mezzo delle grandezze a, b, m, p, e del numero n dei termini; ma questa ricerca per tutte le specie di serie ricorrenti, menerebbe troppo a lungo.

Della Costruzione geometrica delle Grandezze algebriche.

245. Essendo grandezze le linee, le superficie, ed i solidi, su ciascuna di queste tre specie di estensione, possonsi fare le stesse operazioni che fansi su dei numeri e delle grandezze algebriche. Ma i risultati di queste operazioni possonsi in due principali modi valutare, cioè o in numeri, o in linee. Supponendo nel primo modo, che ciascuna delle grandezze date è espressa in numeri, non può aversi presentemente alcuna difficoltà: poichè non deve farsi altro, che sostituire in luogo delle lettere, le grandezze numeriche, che esse rappresentano, ed indi eseguir le operazioni, che vengono indicate dalla disposizione dei segni e delle lettere.

In quanto al modo di valutare in linee i risultati delle soluzioni, che l'Algebra ha esibito, esso è fondato sulla conoscenza di ciò, che significano certe espressioni fondamentali, alle quali rapportansi in seguito tutte le altre. Si anderà dunque a far conoscere le prime, ed indi si farà vedere come vi si riferiscono le seconde: quest' artifizio appunto è ciò, che dicesi *costruire* le grandezze algebri-

che, o sia i problemi, che han condotto a tali grandezze.

246. Se debbasi costruire una grandezza come $\frac{ab}{c}$, in cui a, b, c, indicano rette cognite: si tireranno (*fig.* 7.) due rette indefinite AZ, AX, sotto un qualunque angolo. Su di una AX di tali rette, si prenderà la parte AB uguale alla retta espressa da c, poi l' altra parte AD uguale all' una o l' altra delle due a e b, per esempio ad a; indi sulla seconda AZ, si prenderà la parte AC uguale alla retta b. Si congiungeranno i punti B e C colla retta BC, cui dal punto D si menerà la parallela DE; questa determinerà su di AZ la parte AE equivalente al valore di $\frac{ab}{c}$. Poichè (*Geom.* 102.) le parallele DE e BC offrono l' analogia $AB : AD :: AC : AE$, cioè $c : a :: b : AE$, dunque (*Arit.* 179.) $AE = \frac{ab}{c}$. Dunque per costruire la frazione $\frac{ab}{c}$, bisogna ritrovar la quarta proporzionale in ordine alla retta che rappresenta il suo denominatore, ed alle altre due che denotano i fattori del suo numeratore.

Perciò se deve costruirsi $\frac{aa}{c}$, converrà in ordine a c ed a ritrovar la terza proporzionale; riducendosi questo caso al precedente.

Se devesi costruire $\frac{ab+bd}{c+d}$, si osserverà, che questa frazione è la stessa di $\frac{(a+d)\times b}{c+d}$, or la retta som-

ma di a e d, o sia l'equivalente di $a+d$, chiamisi m, e chiamisi n l'equivalente di $c+d$; così la proposta frazione si ridurrà ad $\frac{mb}{n}$, che si costruirà come nel caso precedente.

Che se abbiasi $\frac{a^2-b^2}{c}$, si rammenterà, che a^2-b^2 è (25) lo stesso di $(a+b)\times(a-b)$; per cui chiamando m ed n rispettivamente queste somma e differenza, la frazion proposta verrà espressa da $\frac{mn}{c}$, che si costruirà come sopra.

Se la frazione da costruirsi è $\frac{abc}{de}$, si metterà essa sotto questa forma $\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}$; costruiscasi $\frac{ab}{d}$ come qui sopra, e 'l risultato chiamisi m, allor sarà $\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}=m\times\frac{c}{e}=\frac{mc}{e}$, che anche si costruirà come di sopra.

Vedesi dunque, che per costruire $\frac{a^2b}{c^2}$, converrà svilupparla in $\frac{a^2}{c}\times\frac{b}{c}$; e rappresentandosi con m il risultato, che si ha costruendo $\frac{a^2}{c}$, verrà quella frazione a ridursi ad $m\times\frac{b}{c}$, o sia ad $\frac{mb}{c}$, che si costruirà come al solito.

Così tutta l'arte consiste in iscomporre la proposta frazione in parti tali, che ciascuna riducasi alla forma $\frac{ab}{c}$, o $\frac{a^2}{c}$, e benchè ciò possa sembrar difficile in al-

cuni casi, pure vi si riuscirà facilmente, impiegandovi alcune trasformazioni.

Per esempio, se debba costruirsi $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$; si supporrà $b^3=a^2 m$, e $c^2=an$; allora $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$ si muterà in $\frac{a^3+a^2 m}{a^2+an}=\frac{(a+m)\times a^2}{(a+n)\times a}=\frac{(a+m)\times a}{a+n}$, grandezza facile a costruirsi per quel, che di sopra si è esposto, se però sansi m ed n. Ora per conseguir ciò ricorrasi alle supposte equazioni $b^3=a^2 m$, e $c^2=an$; e dalla prima si avrà $m=\frac{b^3}{a^2}$, e dalla seconda, $n=\frac{c^2}{a}$, che costruisconsi coi superiori metodi.

Così la costruzione di ogni frazione razionale, cioè, che non contiene radicali, riducesi sempre a ritrovare la quarta proporzionale in ordine a tre rette date; se però il numero delle dimensioni del numeratore, è di una sola unità maggiore di quello delle dimensioni del denominatore.

Accade qualche volta, che le grandezze offronsi sotto di una forma, che sembra rendere inutile il soccorso delle trasformazioni: ciò addiviene quando la grandezza non è omogenea; cioè quando ciascuno de' termini del numeratore, o del denominatore, non è composto dello stesso numero di fattori, per esempio quando la grandezza è come questa $\frac{a^3+b}{c^2+d}$. Ma bisogna osservare, che allor si giunge ad un simile risultato, quando nel corso del calcolo (a fin di renderlo più sem-

plice), si è supposta qualche grandezza uguale all'unità. Per esempio, se in $\frac{a^3+b^2c}{a^2+c^2}$, supponesi $b=1$, essa si ridurrà ad $\frac{a^3+c}{a^2+c^2}$. Ma come non mai si può intraprendere di costruire, senza conoscer gli elementi, che impiegansi a quest' oggetto, così in qualunque caso sempre si sa qual' è quella grandezza, che si è supposta uguale all' unità; si potrà dunque sempre restituirla, in qual cosa non devesi difficoltà alcuna incontrare, perchè dovendo i termini del numeratore esser tra loro dello stesso numero di dimensioni, come pure quelli del denominatore tra loro, (benchè un tal numero possa esser differente, considerando i termini del numeratore, relativamente a quelli del denominatore), si restituirà in quei termini dove bisogna, tal potenza della retta che si è presa per unità, qual conviene per completare il numero delle dimensioni; così se devesi costruire la frazione $\frac{a^3+b+c^2}{a+b^2}$, supponendo, che d è la retta presa per unità, si scriverà $\frac{a^3+bd^2+c^2d}{ad+b^2}$, che si costruisce facendo $b^2=dm$, $c^2=dn$, ed $a^3=d^2p$, lo che la muta in $\frac{d^2p+bd^2+d^2n}{ad+dm}=\frac{dp+bd+dn}{a+m}=\frac{(p+b+n)d}{a+m}$, grandezza facile a costruirsi, posto che siensi costrutti i valori di m, n, e p, cioè $m=\frac{b^2}{d}$, $n=\frac{c^2}{d}$, $p=\frac{a^3}{d^2}$, che essi stessi son facili a costruirsi, in seguito del già detto di sopra.

In tutto ciò, che finora si è detto si è supposto, che

il numero dei fattori, o sia delle dimensioni di ciascun termine del numeratore, è maggiore per una sola unità, di quello delle dimensioni di ciascun termine del denominatore. Ma può esserne maggiore per due, ed anche per tre unità, e non mai per più, eccetto che non siasi supposta qualche retta uguale all'unità, o che alcun dei fattori non rappresenti qualche numero.

247. Quando il numero delle dimensioni del numeratore della proposta grandezza, sorpassa quello delle dimensioni del numeratore, di due unità; allora tal grandezza esprime una superficie, la cui costruzione può sempre ridursi a quella di un parallelogrammo, ed anche di un quadrato.

Per esempio, se debba costruirsi la frazione $\frac{a^3+a^2b}{a+c}$ essa si considererà come $a \times \frac{a^2+ab}{a+c}$; ora $\frac{a^2+ab}{a+c}$ facilmente si costruisce per i metodi superiori, considerandola come $a \times \frac{a+b}{a+c}$: dunque supponendo, che m è il valore della retta ottenuta da tal costruzione, l'espressione $a \times \frac{a^2+ab}{a+c}$ in tal caso si ridurrà ad $a \times m$; quindi anche $\frac{a^3+a^2b}{a+c} = a \times m$, cioè alla superficie di un parallelogrammo, di cui a è l'altezza, ed m la base.

Ad una simile costruzione si ridurrà anche la grandezza $\frac{a^3+bc^2+d^3}{a+c}$, facendo $bc = am$, e $d^2 = an$; poichè essa allora diverrà $\frac{a^3+amc+and}{a+c} = a \times$

$\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$. Ora il fattore $\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$, ed i valori di m ed n si rapportano alle precedenti costruzioni, dunque chiamando p il valore di tal fattore, la costruzione di $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$ si ridurrà a quella di $a \times p$, cioè ad esibire un parallelogrammo di cui a è l' altezza, e p la base.

248. Finalmente se il numero delle dimensioni del numeratore, eccede di tre unità quello delle dimensioni del denominatore; in tal caso la grandezza esprime un solido, la cui costruzione può sempre ridursi a quella di un parallelepipedo.

Per esempio, se devesi costruire $\frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$, si considererà tal grandezza sviluppata in $ab \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; e chiamandosi m la retta risultante dal costruire $\frac{a^2 + ab}{a + c}$ colle superiori regole, la proposta $\frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$ si ridurrà ad $ab \times m$; ora ab, come già si è veduto, rappresenta un parallelogrammo; dunque $ab \times m$ o sia $\frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$ esprime un parallelepipedo, di cui il parallelogramo ab ne dinota la base, ed m l' altezza.

249. Il già detto fin quì, basta per costruir qualunque grandezza razionale. Si considerino ora le grandezze radicali del secondo grado.

Per costruire $\sqrt{ab}$, bisogna (*fig.* 8.) me-

nare una retta indefinita AB, sulla quale si prenderà poi la parte AC uguale alla retta a, e l'altra CB uguale alla retta b: su di tutta AB come diametro, si descriverà il semicerchio, che ne incontra in D la perpendicolare CD condotta da C su di AB; sarà allor CD il valore di $\sqrt{ab}$; cioè (*Geom.* 126), che per avere il valore di $\sqrt{ab}$, bisogna prendere la media proporzionale tra le due rette dinotate da a e b; in fatti si sa (*Geom.* 125.), che $AC : CD :: CD : CB$, o sia $a : CD :: CD : b$, dunque $CD^2 = ab$, e quindi $CD = \sqrt{ab}$.

Da ciò vedesi qual regola dee tenersi, per trasformare in quadrato una qualunque superficie: se trattasi di un parallelogrammo, di cui è a l'altezza, e b la base, chiamandosi x il lato del chiesto quadrato, si avrà $x^2 = ab$, e perciò $x = \sqrt{ab}$, si prenderà dunque la media proporzionale tra la base e l'altezza di quel parallelogrammo. Se trattasi di un triangolo, che si sa (*Geom.* 140.) esser la metà di un parallelogrammo della stessa base, e della stessa altezza, si prenderà la media proporzionale tra la base e la metà dell'altezza, o tra l'altezza, e la metà della base.

Se trattasi di un cerchio, si prenderà la media proporzionale tral raggio e la semicirconferenza; e se trattasi di una qualunque figura rettilinea, come si sa (*Geom.* 143.) che essa è riducibile a triangolo, così si ridurrà la stessa facilmente a quadrato, prendendo la

media proporzionale tra la base, e la metà dell' altezza di tal triangolo.

Ma se la figura non è costrutta, ed abbiasi la sua sola algebrica espressione derivante da qualche sua dimensione, allor si costruirà come le grandezze che or vannosi ad esporre.

Se si ha $\sqrt{(3ab + b^2)}$, tal grandezza si svilupperà in $\sqrt{[(3a + b) \times b]}$; si prenderà dunque la media proporzionale tra $3a + b$, e b.

Parimente, se si ha $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, si svolgerà essa in $\sqrt{[(a+b) \times (a - b)]}$ (25); così si prenderà la media proporzionale tra $a + b$ ed $a - b$. Se si ha $\sqrt{(a^2 + bc)}$, si farà $bc = am$, ed allor si avrà $\sqrt{(a^2 + am)}$, o sia $\sqrt{[(a+m) \times a]}$; si prenderà dunque la media proporzionale tra $a + m$ ed a, però dopo di aver costrutto il valor di $m = \frac{bc}{a}$, seguendo le superiori regole.

Per costruire $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ si potrà anche far $b^2 = am$ e costruire $\sqrt{(a^2 + am)}$ secondo ciò che si è detto. Ma la proprietà del triangolo rettangolo (*Geom.* 164.) ne somministra la seguente più semplice costruzione: si tira la retta AB (*fig.* 9.) uguale alla retta a, dal cui estremo A su di essa si eleva la perpendicolare AC uguale alla retta b; allor congiunta BC, si avrà con essa il valore di $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ in fatti poichè il triangolo CAB è rettangolo, si ha (*Geom.* 164.) $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 + b^2$; dunque $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Per mezzo del triangolo, può anche costruirsi $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ diversamente da ciò che di sopra si è fatto. A tal uopo, si tirerà (*fig.* 11.) la retta $AB = a$,

e descritto su di essa, come diametro, il semicerchio ACB, in questo dal punto A si applicherà la corda $AC = b$; allor condotta BC, questa sarà il valore di $\sqrt{(a^2-b^2)}$; perchè essendo il triangolo ABC rettangolo (*Geom.* 195.), si ha $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = a^2 - b^2$; dunque $BC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Dunque può anche costruirsi $\sqrt{(a^2 + bc)}$ diversamente da quel che si è praticato più sopra, regolandosi nel seguente modo; cioè col fare $bc = m^2$, e costruendo $\sqrt{(a^2 + m^2)}$ come si è già detto; a quale oggetto si determinerà prima m col prender la media proporzionale tra b e c, come appunto vien dinotato dall' equazione $bc = m^2$, che esibisce $m = \sqrt{bc}$.

Se sotto del radicale sonovi più di due termini, la costruzione per mezzo delle trasformazioni, si condurrà sempre ad alcuno de' precedenti metodi. Per esempio, se si ha $\sqrt{(a^2 + bc + ef)}$, si farà $bc = am$, $ef = an$, così il proposto radicale si commuterà in $\sqrt{(a^2 + am + an)}$ o sia in questo $\sqrt{[(a + m + n) \times a]}$, che si costruirà prendendo la media proporzionale tra a ed $a + m + n$, però dopo di aver costrutto i valori di m, ed n, cioè $m = \frac{bc}{a}$, ed $n = \frac{ef}{a}$. Si potrà ancor fare $bc = m^2$, $ef = n^2$ ed allor si dovrà co-

struire $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2)}$. Or nel caso, che il radicale contiene in tal modo sotto di se una serie di quadrati positivi, per esempio $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2 + \text{ec.})}$, si farà $\sqrt{(a^2 + m^2)} = h$; $\sqrt{(h^2 + n^2)} = i$, $\sqrt{(i^2 + p^2)} = k$, ec. per cui essendo $k^2 = i^2 + p^2 = h^2 + n^2 + p^2 = a^2 + m^2 + n^2 + p^2$, sarà $k = \sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2 + \text{ec.})}$. Per costruir grandezze di simil fatta nel più semplice modo, ciascuna ipotenusa si riguarderà successivamente come un cateto, per esempio, (*fig.* 10) presa $AB = a$, vi si eleverà da A la perpendicolare $AC = m$, e condotta BC che sarà $= h$, vi si menerà da C la perpendicolare $CD = n$, indi tirata BD che sarà $= i$, da D vi si eleverà la perpendicolare $DE = p$; fnalmente unita BE che sarà $= k$, sarà questa $= \sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2)}$.

Se alcuni di tali quadrati sono negativi, a quel che si è esposto, si aggiugnerà ciò che si è detto nel costruire $\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Finalmente se devesi costruire una grandezza di questa forma $\frac{a\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(d+e)}}$, si muterà essa in $\frac{a\sqrt{[(b+c)(d+e)]}}{d+e}$, col moltiplicare numeratore, e denominatore per $\sqrt{(d+e)}$;

ed allora determinando la media proporzionale tra $b + c$ e $d + e$, che chiamasi m, resterà di costruire $\frac{am}{d+e}$, lo che è facile.

Del rimanente, qui trattasi di regole generali, però spesso può costruirsi in un modo molto più semplice, ma partendo sempre dagli stessi principj; ora queste semplicizzazioni si ricavano da alcune particolari considerazioni proprie di ciascun problema, e perciò potransi solamente esporre, secondo che i problemi medesimi ne presenteranno l'occasione. Nel terminar questa materia si osserverà soltanto, che sebbene la costruzione delle radicali grandezze, di cui si è parlato, riducesi a determinar delle quarte proporzionali, delle medie proporzionali, ed a costruir triangoli rettangoli; pure qualche volta possonsi avere delle costruzioni più o meno semplici o eleganti, secondo il metodo, che impiegasi per determinare tali medie proporzionali; a questo fine qui si esporranno due altri modi di ritrovar la media proporzionale tra due rette date.

Il primo consiste a descrivere sulla maggiore AB delle due rette date (*fig.* 11.), come diametro, il semicerchio ACB; e presa

in essa da A la parte AD uguale alla minore, condurvi da D la perpendicolare DC che giunga al semicerchio, e finalmente menare la corda AC, che (*Geom.* 112.) sarà media proporzionale tra AB, ed AD.

Il secondo metodo riducesi a prendere (*fig.* 12) sulla maggiore AB delle due rette date, da un estremo, e sia A la parte AC uguale alla minore, indi descrivere sulla restante porzione BC, come diametro, il semicerchio CDB, cui da A conducesi la tangente AD, che (*Geom.* 129) è media proporzionale tra AB ed AC.

Vedesi dunque, che le grandezze razionali possonsi sempre costruire colle linee rette, e che le grandezze radicali del secondo grado possonsi costruire colla retta combinata col cerchio.

Per quel, che riguarda le grandezze radicali di gradi superiori, le costruzioni di esse dipendono dalla combinazione di varie linee curve: del che si parlerà in appresso.

Presentemente si tratterà de' problemi, la cui soluzione dipende dalle grandezze razionali, o radicali del secondo grado.

Diversi Problemi di Geometria, *e riflessioni tanto sul modo di porli in equazioni*, *quanto sulle varie soluzioni*, *che tali equazioni ne offrono.*

250. I principj esposti (67) per porre i problemi in equazione, si applicano egualmente ai problemi Geometrici. Bisogna similmente rappresentar ciò che si cerca, con un segno particolare, ed indi ragionar coll' ajuto di questo segno, e di quelli con cui rappresentansi le altre grandezze, come se tutto fosse cognito, e che voglia verificarsi. Questo metodo appunto è, che dicesi l' *Analisi*

Per essere in istato di fare i ragionamenti, che una tale verificazione esige, bisogna almen conoscere alcuna proprietà della grandezza, che cercasi. È dunque chiaro, che per porre i Geometrici Problemi in equazione, bisogna aver presenti allo spirito le cognizioni esposte nella seconda Parte di questo corso. Nella maggior parte de' problemi numerici, o della natura di quelli percorsi nella prima Sezione, per applicare i principj, il più delle volte basta tradurre in algebrico linguaggio l' enunciazione del problema; ma nell' applicazione dell' Algebra alla Geometria, bisogna

spesso anche impiegare altri mezzi : si farà il possibile di manifestarli secondo che si avanzerà ; ma ciò che ora generalmente può dirsi si è , che per verificare una grandezza , non sempre è necessario di esaminare se essa immediatamente soddisfa alle condizioni del problema : spesso questa verificazione si fa più facilmente , esaminando se tal grandezza ha certe proprietà , che sono essenzialmente concatenate colle condizioni del problema. In seguito di questa riflessione di cui si avrà occasione di far uso si passerà agli esempj , che in questa materia si capiscono più facilmente de' generali precetti.

251. Propongasi dunque per primo problema *di descrivere nel dato triangolo* EHI (fig. 13) *il quadrato* ABCD.

Per questa espressione un *triangolo dato* intendesi un triangolo in cui tutto è noto , cioè i lati , gli angoli , l' altezza , ec.

Con un poco di attenzione si capisce , che questo problema riducesi a trovare sull' altezza EF del triangolo un punto G , pel quale condotta ad HI la parallela AB , sia questa uguale a GF ; così l' equazione si presenta naturalmente , poichè non deve farsi altro , che determinare l' espressione algebrica di AB, l' altra di GF , ed indi pareggiarle.

Dunque chiamisi a l' altezza cognita EF; b, la base data HI; ed x, la retta incognita GF; in tal caso $EG = a - x$.

Or poichè AB è parallela ad HI, perciò si ha (*Geom.* 115.) $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$, ossia $a : a - x :: b : AB$, dunque (*Arit.* 179.) $AB = \frac{ab - bx}{a}$; e perchè AB dev'essere uguale ad FG, sarà $\frac{ab - bx}{a} = x$; donde per le regole della sezione prima si ha $x = \frac{ab}{a + b}$.

Per costruir tale grandezza bisogna, secondo ciò che si è detto (246), trovar la quarta proporzionale in ordine ad $a + b$, b, ed a, lo che si eseguirà in questo modo: si tirerà da F verso O la retta $FO = EF + HI = a + b$ e si unirà EO; di poi presa $FM = HI = b$, da M si menerà MG parallela ad EO, che incontrandosi con EF determinerà GF pel valore di x: poichè per i triangoli simili EFO, GFM stà $FO : FM :: FE : FG$, ossia $a + b : b :: a : FG$; dunque $FG = \frac{ab}{a + b}$.

252. Propongasi per secondo problema, il seguente: *Data la retta* BC *(Fig. 14.)*, *e gli angoli* B *e* C, *che con essa formano le*

altre due rette BA *e* CA; *determinar la distanza* AD *alla quale le due rette* BA *e* CA *s' incontrerano.*

Agli angoli si fa prender parte nel calcolo algebrico coll'ajuto delle stesse linee, che impiegansi nella Trigonometria, cioè per mezzo de' seni, tangenti ec. Così quando dicesi, che sia dato un angolo per esempio C intendesi, che sia dato il valore del suo seno, o della tangente; ciò premesso ponganse $BC = a$, $AD = y$. Nel triangolo rettangolo ADC si avrà (*Geom.* 296) $CD : DA$ :: il raggio è alla tangente dell' angolo ACD, ossia chiamando r il raggio, ed m la tangente dell' angolo ACD, $CD : y :: r : m$; dunque (*Arit.* 179.) $CD = \frac{ry}{m}$. Chiamandosi n la tangente dell' angolo ABD con simile ragionamento si troverà essere $BD : y :: r : n$; dunque $BD = \frac{ry}{n}$; ma $BD + DC = BC = a$; dunque $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$; dal che si rileva $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

Quest' espressione può rendersi più semplice introducendo in vece delle tangenti m ed n de' due angoli C e B le cotangenti di essi p e q; a tal uopo convien ricordarsi (*Geom.* 280), che *tang.* : r :: r : *cot.*, in virtù di questa

proposizione si avrà $m : r :: r : p$ ed $n : r :: r : q$, dal che deducesi $m = \frac{r^2}{p}$, ed $n = \frac{r^2}{q}$; sostituendo questi valori in vece di m ed n in quello di y, si avrà $y = \frac{\frac{ar^4}{pq}}{\frac{r^3}{p} + \frac{r^3}{q}} = \frac{\frac{ar^4}{pq}}{\frac{pr^3 + qr^3}{pq}}$ $= \frac{ar^4}{pq} \times \frac{pq}{pr^3 + qr^3} = \frac{ar}{p + q}$ che facilmente si costruisce prendendo la quarta proporzionale in ordine $p + q$, r ed a.

253. Da ciò vedesi, che quando tra le grandezze, che possonsi riguardar come date; quelle, che sonosi impiegate non conducono ad un risultato tanto semplice, quanto si desidera; allora non è necessario di ricominciare un nuovo calcolo per assicurarsi, se possa giungersi ad un più semplice risultato, impiegando le altre grandezze date: ma basta esprimere con equazioni i rapporti delle date, che dapprima sonosi impiegate; con quelle altre, che vogliousi introdurre. Così appunto i rapporti di m ed n con p e q sonosi poc'anzi espressi colle equazioni $m = \frac{r^2}{p}$, ed $n = \frac{r^2}{q}$, ed allora con semplici sostituzioni si è ottenuta una soluzione dipendente da p e q.

254. Si sceglierà per terzo esempio un problema, che dà luogo di far vedere tutto insieme il modo di porre in equazione i problemi geometrici, ed anche come preparando in varie maniere tali equazioni possonsi discoprire delle nuove proposizioni.

Dati i tre lati del triangolo ABC (fig. 15), *determinare le perpendicolare* BD, *ed i segmenti* AD, DC, *da essa troncati.*

Se fosse nota ciascuna delle chieste rette, esse si verificherebbero nel seguente modo. Si farebbe la somma dei quadrati di BD, e DC, e si vedrebbe se pareggiasse il quadrato di BC, lo che devrebb' essere pel triangolo rettangolo BDC (*Geom.* 164). Similmente si sommerebbe il quadrato di AD coll' altro di BD, e si vedrebbe se la somma sarebbe uguale al quadrato di AB.

S' imiti dunque questo modo di procedere, per cui pongasi $BD = y$, $CD = x$, $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$; in tal caso perchè $AD = AC - CD$, sarà essa $= c - x$. Dunque si avrà $x^2 + y^2 = a^2$, e $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = b^2$.

Come x^2 ed y^2 hanno in ciascuna equazione per coefficiente l' unità, così sottraesi la seconda dalla prima, e si ha $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, da cui

rilevasi $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{a^2 - b^2}{2c} + \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2} c$ (25).

Ora essendo il valor di x sotto di questa forma vedesi, che per averlo bisogna (246) ritrovar la quarta proporzionale in ordine a c, $a+b$, ed $a-b$, prender la metà di essa, ed indi aggiungervi $\frac{1}{2} c$, cioè la metà del lato AC; lo che è totalmente conforme a ciò che si è detto (*Geom.* 303).

Ma possonsi dedurre altre proposizioni da queste stesse equazioni; se ne esporranno alcune per accostumare i principianti ad osservare ciocchè mai contiensi in una equazione.

255. 1.° L'equazione $2cx - c^2 = a^2 - b^2$ è la stessa di $c. (2x - c) = (a+b)(a-b)$. Or poichè il prodotto de' due primi fattori pareggia quello de' due ultimi, perciò quelli potransi considerar come gli estremi, e questi come i medj di una proporzione (*) onde si avrà $c : a+b :: a-b : 2x - c$; ora $2x - c =$

(*) Da ora innanzi quando ciascun de' due membri di una equazione costa del prodotto di due fattori se ne potrà sempre dedurre la proporzione. Basta osservare una volta per sempre, che quando due prodotti sono uguali i fattori di uno posson considerarsi come gli estremi di una proporzione, di cui i fattori dell' altro costituiranno i medj (*Arit.* 180).

$x + x - c$; dunque, in vece di tali lettere sostituendo le rette, che esse rappresentano, sarà $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$, che è precisamente quello, che si è dimostrato (*Geom.* 302).

256. 2.° Se col centro C, e col raggio uguale a BC, descrivesi l'arco BO in cui si tira la corda BO, si avrà $(BD)^2 + (DO)^2 = (BO)^2$; ora $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$; dunque $BO^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; ma quì sopra si è trovato $y^2 + x^2 = a^2$; dunque $(BO)^2 = 2a^2 - 2ax = 2a \times (a - x)$; onde sostituendo per x il suo valore $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$, sarà $(BO)^2 = 2a\left(a + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right) = 2a\left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2c}\right) = \frac{a}{c} \times [b^2 - (a-c)^2]$, perchè $2ac - a^2 - c^2 = -(a^2 - 2ac + c^2) = -(a-c)^2$; or considerando $a - c$ come una sola grandezza, si ha (25) $b^2 - (a-c)^2 = (b + a - c) \times (b - a + c)$; dunque $BO^2 = \frac{a}{c}(b + a - c) \times (b - a + c) = \frac{a}{c}(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$ sicchè se chiamasi $2s$ la somma de' tre lati, si avrà $(BO)^2 = \frac{a}{c}(2s - 2c)(2s - 2a) = 4\frac{a}{c} \times (s - a)(a - s)$; or se dal punto C si abbassa su di OB la perpendicolare CI, nel triangolo rettangolo CIO si avrà (*Geom.* 295) quest'analogia $CO : OI :: R : sen.\ OCI$, cioè $a : \frac{1}{2}BO :: R : sen.\ OCI$; dunque $\frac{1}{2}BO = \frac{a\ sen.\ OCI}{R}$, o sia $BO = \frac{2a\ sen.\ OCI}{R}$,

e perciò $(BO)^2 = \frac{4a^2(\text{sen. } OCI)^2}{R^2}$: dunque pareggiando questi due valori di $(BO)^2$, sarà $\frac{4a^2}{R^2}$ $\times (\text{sen. } OCI)^2 = \frac{4a}{c}(s-a)(s-c)$, o sia dividendo per $4a$, e togliendo i denominatori, $ac(\text{sen. } OCI)^2 = R^2(s-a)(s-c)$, donde rilevasi questa proporzione $ac : (s-a)(s-c) :: R^2 : (\text{sen. } OCI)^2$; che è la regola stabilita (*Geom.* 304) per trovar gli angoli di un triangolo per mezzo dei tre lati, la cui dimostrazione ivi si rimandò a questa terza parte. In fatti ac è il prodotto dei due lati, che comprendono l'angolo BCA; $s-a$ ed $s-c$ sono i due residui, che ottengonsi sottraendo successivamente questi due stessi lati dalla semisomma, R è il raggio, ed OCI è la metà dell'angolo BCA, perchè CI è la perpendicolare abbassata dal centro C sulla corda BO.

257 3.° L'equazione $y^2+x^2=a^2$ esibisce $y^2=a^2-x^2=(a+x)(a-x)$; dunque mettendo per x il suo valore, si avrà

$$y^2=\left(a+\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\right)\times\left(a+\frac{b^2-a^2-c^2}{2c}\right)$$

$$=\left(\frac{2ac+a^2-b^2+c^2}{2c}\right)\times\left(\frac{2ac-a^2+b^2-c^2}{2c}\right)$$

$$=\left(\frac{(a+c)^2-b^2}{2c}\right)\times\left(\frac{b^2-(a-c)^2}{2c}\right)$$

$$\left[\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right]\times\left[\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2c}\right];$$

onde $4c^2y^2=(a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)$ $(b-c+a)=(a+b+c)(a+b+c-2b)$ $(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)$; dunque

chiamando $2s$ la somma $a + b + c$ dei tre lati, sarà $4c^2 y^2 = 2s \cdot (2s - 2b)(2s - 2a)(2s - 2c)$ $= 16\, s\,(s - a)(s - b)(s - c)$; e dividendo per 16, riducendo, ed estraendo la radice quadrata, sarà $\frac{cy}{2} = \sqrt{[s.(s-a)(s-b)(s-c)]}$. Ma $\frac{cy}{2}$, o sia $\frac{AC \times BD}{2}$ è la superficie del triangolo ABC, dunque per aver la superficie di un triangolo per mezzo dei tre lati, bisogna dalla semisomma di questi sottrarre successivamente ciascun dei medesimi, indi moltiplicare i tre residui tra essi, e per la semisomma anzidetta; e finalmente estrarre la radice quadrata da tal prodotto.

258. 4.° L'equazione $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, esibisce $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$; ma se la perpendicolare caderà fuori del triangolo, conservando sempre le stesse denominazioni, si avrà (*fig.* 16) $y^2 + x^2 = a^2$, ed $y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = b^2$, perchè AD che era $c - x$ qui diviene $c + x$. Dunque sottraendo la prima equazione dalla seconda, si avrà $c^2 + 2cx = b^2 - a^2$, o sia $c(c + 2x) = (b + a) \times (b - a)$, donde si ha $c : b + a :: b - a : c + 2x$; ora $c + 2x = x + c + x = CD + AD$, dunque $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD$, locchè è la seconda parte della proposizione, che si è dimostrata (*Geom.* 300).

259. 5.° La stessa equazione $c^2 + 2cx = b^2 - a^2$, offre $b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$; dunque comparando all'equazione $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$, che conviene alla *fig.* 15 vedesi, che il quadrato b^2 del lato AB opposto all'angolo acuto C è minore della somma $a^2 + c^2$ dei quadrati degli altri due lati, perchè equivale a tal som-

ma diminuita di $2cx$. All' opposto, il quadrato b^2 del lato AB opposto all'angolo ottuso (*fig.* 16), pareggia $a^2 + c^2 + 2cx$, cioè è maggiore della somma degli altri due lati. Dunque per mezzo di queste due osservazioni, quando debbonsi calcolare gli angoli di un triangolo per mezzo dei lati, si può conoscere se l'angolo che si cerca, è acuto, o ottuso.

260. 6.° Le due equazioni $b^2 = a^3 + c^3 - 2cx$, e $b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$, confermano ciò che si è detto sulle quantità negative. Perchè vedesi, che siccome la perpendicolare BD (*fig.* 15 e 16) cade dentro o fuori del triangolo, così il segmento CD trovasi in diversi lati riguardo ad essa; ed in fatti il termine $2cx$ tien segni contrarj in queste due equazioni. Dunque, al concontrario, qualunque siano i calcoli, che saransi fatti per un di questi triangoli; basta dar segni contrarj alle parti, che saran situate in diversi lati, su di una stessa retta, affinchè abbiasi ciò che conviene per i casi analoghi dell' altro triangolo: ora in quel che di sopra si è detto, tanto sul calcolo di uno degli angoli, quanto su quello della superficie, il segmento CD non più vi prende parte; dunque queste due proposizioni appartengono generalmente a qualunque specie di triangolo rettilineo.

Da queste stesse equazioni si potrebbero rilevare varie altre proposizioni, ma debbonsi altri oggetti considerare.

261. Generalmente parlando, benchè abbiansi maggiori mezzi per porre in equazione i geometrici problemi, secondo che sappiasi un

maggior numero di geometriche verità; pure come l' Algebra somministra essa stessa i mezzi di ritrovar tali verità, così il numero delle proposizioni veramente necessarie è molto limitato. Queste due proposizioni, cioè, che *i triangoli simili hanno proporzionali i lati omologhi*, e che *in un triangolo rettangolo il quadrato dell' ipotenusa, pareggia la somma de' quadrati de' cateti*, sono la base dell' applicazione dell' Algebra alla Geometria. Ma secondo la natura de' problemi, possonsi avere varj mezzi di farne uso. Questo uso si capisce facilmente nell' esposto problema, ma esso non si manifesta sì agevolmente nelle conseguenze, che sonosi dal suo risolvimento dedotte, per calcolar l' angolo col mezzo dei tre lati; nel descrivere l' arco *BO* (*fig.* 15), per calcolarne la sua corda *BO*; e nel calcolare il seno dell' angolo *OCI*, per mezzo di *OI* metà di essa. Lo stesso è di molti altri problemi. Delle volte bisogna prolungar tali rette, finchè ne incontrino delle altre; delle volte bisogna menarvele parallele, o che vi facciano un dato angolo. In somma l' applicazione dell' Algebra alla Geometria, e ad altre materie, dalla parte dell' analista, esige un certo discernimento nella scelta ed uso dei mezzi.

Ma come questo discernimento si acquista in gran parte colla pratica, così tali osservazioni vansi ad applicare a diversi esempj.

262. Propongasi in prima questo problema: *Da un punto* A (fig. 17) *dato di sito relativamente a lati* HD *e* DI *del dato angolo* HDI *condurvi la retta* AEG, *che vi costituisca il triangolo* EDG *di data superficie*; *cioè che pareggi un dato quadrato* c^2.

Dal punto A si tiri la retta AB parallela a DH, e l'altra AC perpendicolare su di DG prolungata: dal punto E in cui la retta AEG tagliar deve DH, intendasi condotta EF perpendicolare a DI. Se si sapessero EF e DG, e fra esse si moltiplicassero, e di questo prodotto la metà si prendesse, si avrebbe la superficie del triangolo EDG, la quale dovrebbe pareggiare il quadrato c^2.

Suppongasi dunque $DG = x$, e veggasi di determinare il valore di EF, per mezzo di x, e di ciò che vi è di cognito nel problema. Poichè il punto A è dato di sito, sarà noto il prolungamento DB di DI posto tra DH e la sua parallela AB, e sarà nota anche la perpendicolare AC abbassata da A su di DG prolungata. Pongansi dunque $BD = a$, ed $AC = b$; allora per i triangoli simili ABG ed

EDG, sarà $BG : DG :: AG : EG$; e per gli altri ACG. ed EFG, sarà $AG : EG :: AC : EF$; sicchè $BG : DG :: AC : EF$, cioè $a + x : x :: b : EF$, dunque (*Arit.* 179) $EF = \frac{bx}{a+x}$ (*); e poichè la superficie del triangolo EDG deve pareggiare il quadrato c^2, perciò $EF \times \frac{DG}{2}$, o sia $\frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2}$, cioè $\frac{bx^2}{2a+2x} = c^2$, e togliendo il denominatore, $bx^2 = 2ac^2 + 2c^2x$.

Questa equazione risoluta secondo le regole delle equazioni del secondo grado (99, 100), esibisce i due seguenti valori $x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$; dei quali quello in cui evvi il segno — è inutile al presente problema.

Per costruire il primo, si pone sotto di questa forma $x = \frac{c^2}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$: ciò posto, tirisi la retta indefinita PQ (*fig.* 18), e su di essa da un suo qualunque punto C

(*) Da ora innanzi, ogni volta che devesi esprimere un termine di una proporzione, di cui tre saranno espressi algebricamente, senza più farlo osservare, si prenderà il prodotto de' due medj diviso per l'estremo, o de' due estremi diviso pel medio; secondocchè il chiesto termine sarà un estremo, o un medio.

s' innalzi la perpendicolare $AC = b$, e prendansi su di CA, e CP le porzioni CQ e CM ciascuna uguale al lato c del dato quadrato; e condotta AM, ad essa dal punto O si meni la parallela ON, che determina CN pel valore di $\frac{c^2}{b}$; poichè i triangoli simili ACM; OCN danno $AC : OC :: CM : CN$, cioè $b : c :: c : CN$, dunque $CN = \frac{c^2}{b}$; per cui il valore di x diviene $x = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; ma $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$ esprime la media proporzionale tra CN, e $CN + 2a$ (249); dunque rimane solo a determinar tale media, per indi aggiungerla a CN. A tal uopo, da C verso Q prendasi $CQ = 2a$, e su di NQ somma di NC e CQ, considerata come diametro, descrivasi il semicerchio NVQ, che incontri CA in V, nel quale conducasi la corda NV, e facciasi $NP = NV$, sarà $CP = x$; poichè NV (*Geom.* 112) è media proporzionale tra NC e NQ, cioè tra CN e $CN + 2a$ dunque NV o sia $NP = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; sicchè $CP = CN + NP = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]} = x$; dunque prendendo $DG = CP$ (*fig.* 17 e 18) si avrà il punto G, al quale tirando da A la

retta AG, si costituirà il triangolo $EDG =$ al dato quadrato c^2.

263. Se vogliasi sapere il significato del secondo valore di x, cioè $x = \frac{c^2}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$ si osserverà, che nel problema niente determina se trattasi piuttosto dell'angolo EDG (*fig.* 17) che del suo verticale $E'DG'$, e le grandezze date essendo le stesse sì per quello, che per questo; questa seconda soluzione dev' esser quella del problema in cui si tratterà di fare nel angolo $E'DG'$ lo stesso che si è fatto nell' angolo EDG. In fatti ponendo $DG' = x$, e serbando tutte le altre denominazioni, i triangoli simili ABG', $E'DG'$ ne danno $BG' : DG' :: AG' : G'E'$, ed abbassando la perpendicolare $E'F'$, i triangoli simili ACG, $E'F'G'$ esibiscono $AG' : G'E' :: AC : E'F'$; dunque $BG' : DG' :: AC : F'E'$, cioè $a - x : x :: b ; F'E'$; dunque $F'E' = \frac{bx}{a - x}$; e poichè la superficie del triangolo $G'E'D$ pareggiar deve il quadrato c^2, perciò $\frac{bx}{a - x} \times \frac{x}{2} = c^2$, da cui si ha $bx^2 = 2ac^2 - 2cx$ onde $x = \frac{c^2}{b} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$, cioè questi valori di x son precisamente quelli del caso precedente, ma però differenti solo nei segni, come appunto esser deve, poichè nel caso attuale la x si è presa dal lato opposto a quello, in cui si è presa nel precedente. Lo che nuovamente conferma ciò, che altre volte si è detto; cioè, che i negativi valori deb-

son prendersi in senso opposto a quello, in cui si son presi i positivi.

La costruzione esibita pel caso precedente, è applicabile anche a questo, ma col solo seguente cangiamento, di portare (*fig.* 18) NV da N in K verso Q; allora il valor di x, che nel caso precedente era CP, nell'attuale sarà CK. In fatti il valor di x, che conviene al caso attuale, è $x = -\frac{c^2}{b} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$ $= -\frac{c^2}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right) \times \frac{c^2}{b}\right]} = -CN +$ $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; dunque poichè $NV = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$, perciò si ha $x = -CN + NV = -CN + NK = CK$; così si porterà CK da D in G' (*fig.* 17) e si avrà il punto G', al quale tirando da A la retta $AG'E'$, si avrà il triangolo $G'DE'$ uguale al dato quadrato c^2; cioè la seconda soluzione del problema.

264. Si è supposto, che il punto A (*fig.* 17) era al di sopra della retta BG; ma se esso fosse al di sotto, (*fig.* 19) la grandezza b, o la retta AC sarebbe negativa, ed i due primi valori di x quindi sarebbero $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} - \frac{2ac^2}{b}\right)} = -\frac{c^2}{b} \pm$ $\sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right) \times \frac{c^2}{b}\right]}$; ove vedesi, che il problema allora è possibile, quando $2a$ è minore di $\frac{c^2}{b}$, e quando ne è maggiore, allora la grandezza sotto del radicale è negativa, e per conseguenza (98) i valori di x sono immaginarj o assurdi. Quando $2a$ è minore

di $\frac{c^2}{b}$, i due valori di x sono negativi; cioè, che allora il problema è impossibile riguardo all' angolo HDI; ma esso ha due soluzioni riguardo al solo angolo $E'DG'$. Per avere queste due soluzioni bisogna costruire i due valori di $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\right.}$ $\left.\times \frac{c^2}{b}\right]$ lo che si farà nel seguente modo. Determinato come quì sopra il valore CN di $\frac{c^2}{b}$, si prenderà (*fig.* 20) $NQ = 2a$, e descritto su di NQ come diametro il semicerchio NVQ, ad esso si condurrà la tangente CV; indi si porterà CV da C in P verso N, ed all' opposto anche da C in K; allora NP ed NK saranno i due valori di x; i quali si porteranno (*fig.* 19) da D in G e da D in G'; e menando dal punto A ai punti G e G' le due rette EG, $E'G'$, ciascuno dei due triangoli EDG, $E'DG'$, sarà uguale al dato quadrato c^2. Riguardo all' aver detto, che PN ed NK (*fig.* 20) sieno i due valori di x, ciò si rileva dall' essere $OV = \sqrt{(CQ \times CN)}$, perchè essa (*Geom.* 129) tra queste è media proporzionale; dunque sostituendo per queste rette i valori di esse, sarà CV, o sia CP, o sia $CK = \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right) \times \frac{c^2}{b}\right]}$: dunque $NP = CN - CP = \frac{c^2}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right) \times \frac{c^2}{b}\right]}$; ed $NK = CN + CK = \frac{c^2}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right) \times \frac{c^2}{b}\right]}$; or queste due grandezze,

cambiandovi i segni, sono i due valori di x; dunque portando esse da D verso G (*fig.* 19) saranno i valori di x.

265. Se il punto A (*fig.* 21) era nello stesso angolo HOI, allora cadendo BO dal lato opposto a quello in cui cadeva prima, a sarebbe negativa, ed i due primitivi valori di x sarebbero $x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} - \frac{2ac^2}{b}\right)}$, che cambiandovi i segni sono i stessi di quelli, che si son costrutti. Dunque vedesi, che allora devesi costruire, come si è fatto (*fig.* 20), ma portare i valori NP ed NK di x da D verso I (*fig.* 21); ed avransi i due triangoli DEG, $DE'G'$, che ambidue soddisferanno al problema.

266. Finalmente il punto A (*fig.* 22) potrebbe esser dato al di sotto di BD, ma nell' angolo BDE'. Allora a e b sarebbero ambedue negative, da cui si avrebbe $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$, che sono precisamente di segno contrario ai primi trovati valori di x. Dunque si costruiranno come si è fatto (*fig* 18). Allora sarà CK il valor positivo di x, e CP il negativo; il primo si porterà (*fig.* 22) da D in G verso B, e l' altro verso la parte opposta, cioè da D in G'.

Si è molto fermato su dei differenti casi di questa soluzione, per mostrare come tutti son compresi in una sola equazione; come si son dedotti con i soli cambiamenti di segni; come le contrarie posizioni delle rette vengon dinotate dalla contrarietà dei segni, ed all' opposto. Ma rimane ancora ad indicare alcuni usi di questa stessa soluzione.

267. Se propongasi questo problema: *Da un punto* A (fig. 23) *dato fuori, o dentro di un dato triangolo* DHI; *condurre una retta* AF, *che divida tal triangolo in due parti* DEF, EFIH, *che sian tra loro in una data ragione, indicata da quella di* m : n; questo problema troverà la sua soluzione nel precedente. Poichè il triangolo *DHI* è dato, e si sa qual parte di esso dev' esser l'altro *DEF*; se cercasi in ordine ad $m+n$, m, ed alla superficie del dato triangolo *DHI*, il quarto proporzionale, questo sarà la superficie, che aver deve il triangolo *DEF*. Ma sempre può trovarsi un quadrato c^2 uguale a tal superficie (249), dunque il problema è ridotto a condurre dal punto *A* una retta *AEF*, che comprenda con i due lati *DH*, *DI* un triangolo *DEF* uguale al quadrato c^2; cioè è ridotto al precedente problema.

268. Vedesi ancora, che allo stesso problema si riconduce quello di menare da un dato punto *A* una retta (*fig.* 24), che divida un dato qualunque rettilineo *BCDHK* in due parti *BCFE*, *EFDHG*, che sien tra esse in data ragione. In fatti la figura *BCDHK* essendo data, si sanno tutti gli angoli, e tutti i lati suoi; dunque facilmente si saprà il triangolo *BLC* formato dai due lati *KB*, e *DC* prolungati, perchè in esso si sanno il lato *BC*, ed i due angoli *LBC*, ed *LCB* supplementi degli angoli dati *CBK*, e *BCF*; ma la superficie di *EBCF* è anche nota, per essere una porzione determinata di tutto il dato rettilineo *BCDHK*; dunque il problema è ridotto a condurre una retta *AEF*, che nel dato angolo *KLD* forma un triangolo uguale ad un dato quadrato. Finalmente da ciò vedesi

come questo rettilineo si possa dividere in più di due parti, che sien tra loro in date ragioni.

269. È anche a proposito di fare una osservazione, che si confermerà con varj esempj, ed è che se ad alcune delle grandezze che entrano nell'equazione, che serve a risolvere un problema, si mutino i segni in segni contrarj, tale equazione non si cambia affatto; o se un cambiamento di posizione nella linea o nelle linee cercate della figura, non porta seco alcun cambiamento di posizione, nè di grandezza nelle linee date; allora tra i differenti valori di x, se più ve ne sieno nella equazione, sempre se ne troverà uno, che sarà la soluzione propria pel caso dinotato da questo cambiamento.

Per esempio nel problema ora esposto si è osservato, che uno dei due valori di x, esibisce direttamante la soluzione pel caso, in cui la retta *AEG* (*fig.* 17) attraversar deve l'angolo *HDI*, come si è supposto nel calcolare; ma nello stesso tempo si è anche osservato, che il secondo valore di x offre la soluzione pel caso, ove si trattasse non dell'angolo *HDI*, ma del suo verticale. Ciò accade perchè dovendosi in ciascun caso impiegare le stesse grandezze date, e fare gli stessi ragionamenti, devesi quindi pervenire alla stessa equazione; dunque la stessa equazione deve dare le due soluzioni. Se ne vedranno ancora degli esempj, nello esporre altri problemi.

270. Propongasi questo problema. *Da un punto* A *dato fuori di un dato cerchio* BDC (fig. 25) *condurvi una retta* AE *in modo*,

che il suo segmento DE *intercetto nel cerchio , pareggi una retta data.*

Per esser dato il cerchio $BDEC$ è noto il suo diametro ; e per esser dato il punto A, se per esso , e pel centro O si tira la retta AOC, la retta AB è nota , e quindi anche la retta AC. Ora per sapere in che modo tirar si deve la retta AE, basta saper la grandezza di AD, il cui prolungamento DE pareggiar deve la data retta. Pongansi dunque $AD = x$, $AB = a$, $AC = b$, e c la retta data , cui DE dev' essere eguale.

Ciò posto , per essere AE, AC seganti condotte al cerchio dallo stesso punto A, starà (*Geom.* 127) $AC : AE :: AD : AB$, cioè $b : x + c :: x : a$, per cui $x^2 + cx = ab$; e risolvendo tale equazione di secondo grado , si ha $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)}$, dei quali valori di x, solamente il primo $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)}$, soddisfa all'attual problema.

Per compir la soluzione bisogna costruir tale grandezza , locchè può farsi impiegando le trasformazioni esposte (246). A tal uopo , dal punto A si tirerà al cerchio la tangente

AT, che sarà (*Geom.* 129) media proporzionale tra AB ed AC, e si avrà $(AT)^2 = AB \times AC = ab$; dunque sarà $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{\left[\frac{1}{4}c^2 + (AT)^2\right]}$: conducasi il raggio TO, che sarà perpendicolare ad AT (*Geom.* 48), ed in esso prendasi $TI = \frac{1}{2}c$, e si unisca AI, questa sarà uguale a $\sqrt{\left[\frac{1}{4}c^2 + (AT)^2\right]}$, dunque per aversi x bisogna portare TI da I in R, e descrivere col centro A ed intervallo AR l'arco RD, che determinerà il chiesto punto D, perchè $AD = AR = AI - IR = AI - IT = \sqrt{\left[\frac{1}{2}c^2 + (AT)^2\right]} - \frac{1}{2}c = x$.

Ora per conoscere il significato del secondo valore $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)}$ bisogna osservare, che per essere esso tutto negativo deve cader dal lato opposto a quello, in cui cade AD. Veggasi dunque se evvi qualche problema, che dipende dalle stesse grandezze e dai medesimi ragionamenti, e che si riferisce a questo lato. Ora si osserva, che supposte a e b negative, l'equazione $x^2 + cx = ab$ non cambia in modo alcuno;

dunque perchè allora il cerchio $BDEC$ diverrebbe l'altro $B'D'E'C'$ situato a sinistra nel modo stesso, che il primo l'è a destra ne segue, che questa stessa equazione contiene anche la soluzione, che apparterrebbe a questo caso; dunque il secondo valore di x, cioè $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)}$; appartiene a tal caso, e soddisfa alla stessa condizione; perciò se nella precedente costruzione si porta TI da I in R', su di AI prolungata, e che poi col centro A e col raggio AR' descrivesi un arco, che taglia in E' la circonferenza $B'D'E'C'$, il punto E' determinerà l'intercetta $E'D' = c$: in fatti, $AE' = AR' = AI + IR' = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + AT^2\right)} + \frac{1}{2}c$, cioè è uguale al secondo valor di x, cambiativi i segni; e poichè si porta questa grandezza dal lato opposto a quello verso del quale si è supposto, che tendeva il primo valor di x ne segue, che veramente AE' è il secondo valor di x.

Del rimanente, come i due cerchi sono uguali e situati dello stesso modo, le soluzioni possono appartenere ambedue ad uno stesso cerchio, in maniera che se col centro A

ed intervallo AR' descrivesi l' arco $R'E$, la retta AE anche risolverà il problema; in fatti facilmente si vede, che il punto E determinato in tal modo, è sul prolungamento della retta AD determinata colla prima costruzione. Ma delle due distinte soluzioni, che l' Algebra somministra, la prima cade a destra del punto A, ed appartiene al punto D della circonferenza convessa; l' altra ne cade a sinistra, e spetta al punto E' della circonferenza concava.

Da ciò vedesi maggiormente confermato, che le grandezze negative debbon portarsi dai lati opposti, e reciprocamente.

271. Suppongasi ora, che trattisi di *trovar nella direzione della data retta* AB (fig. 26) *un punto* C *tale*, *che la sua distanza dal punto* A, *sia media proporzionale trà la sua distanza dal punto* B, *e l' intera retta* AB.

Pongasi $AB = a$, ed $AC = x$; sarà $BC = AB - AC = a - x$; ma si vuole che sta $AB : AC :: AC : CB$, dunque sarà $a : x :: x : a - x$, per cui moltiplicando le estreme e le medie, sarà $x^2 = a^2 - ax$, o sia $x^2 + ax = a^2$, quale equazion di secondo grado risolvendo, si ha $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + a^2\right)}$.

Per costruire il primo valore $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + a^2\right)}$ bisogna, secondo ciò che si è detto (249), elevare da B su di AB la perpendicolare $BD = \frac{1}{2}a$, e tirare AD, che sarà uguale a $\sqrt{(BD^2 + AB^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + a^2\right)}$; dunque rimane a sottrarre da tal grandezza l'altra $\frac{1}{2}a$, che si farà portando DB da D in O; ed allora AO sarà uguale a $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + a^2\right)} - \frac{1}{2}a$, cioè sarà uguale ad x, onde si porterà AO da A in C verso B, e C sarà il punto richiesto.

Pel secondo valore $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + a^2\right)}$, se si porta BD da D in O' sul prolungamento di AD, allora $AO' = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + a^2\right)}$; e poichè il valore di x è tal grandezza presa negativamente, perciò si porterà AO' da A in C' su di AB prolungata dal lato opposto a quello, in cui nella soluzione si è supposto che tendeva x, e si avrà un secondo punto C' tale, che prodottavi AB sarà AC' media proporzionale tra AB e BC'.

Di passaggio si osservi, che questo problema è quello di *dividere una data retta* AB *in estrema e media ragione*; la costruzione pure è quella recata (*Geom.* 130). Ma vedesi, che l'Algebra ha condotto a ritrovarla, laddove in Geometria supponesi già trovata la soluzione, e se ne dimostra la sola veracità.

272. Se si fa un poco di attenzione sulla strada, che si è tenuta nel precedente problema si vedrà, che si è sempre presa per incognita una retta, che essendo una volta cognita, servirà a determinar tutte le altre, con osservare le condizioni del problema. Ciò è quello, che devesi sempre osservare; ma rimane anche a fare una scelta per determinarsi su di questa retta: spesso ve ne son molte ciascuna delle quali avrà egualmente la proprietà di determinar tutte le altre, se una volta essa fosse cognita; or tra quelle ve ne sono tali, che condurrebbero ad equazioni più composte le une delle altre. Per ajutare a determinarsi sulla scelta in questi casi, quì si stabilirà la regola seguente.

273. *Se tra le rette o le grandezze, che essendo prese ciascuna per l'incognita, potrebbero servire a determinar tutte le altre gran-*

dezze, se ne trovino due, che corrispondano dell' istesso modo, tal che si preveda, che l' una o l' altra condurrebbe alla stessa equazione (non avuto riguardo a' segni + o —); allor sará espediente di non impiegar nè l' una nè l' altra, ma di prendere per incognita un'altra grandezza, che dipenda egualmente da ciascuna di esse; per esempio, di prendere per incognita la semisomma, o la semidifferenza di esse, o la media proporzionale tra le medesime, o ec. Ed in tal modo si giungerà sempre ad una equazione più semplice di quella, in cui s' impiegasse l' una, o l' altra.

Il problema, che si è risoluto (270) può somministrarne un esempio. In esso niente fa decidere a prendere piuttosto AD, che AE per incognita (*fig.* 25); prendendo AD per l' incognita x, si avrà $x + c$ per AE; e prendendo AE per l' incognita x, si avrebbe avuto $x - c$ per AD, e del rimanente, il calcolo in ciascun caso è lo stesso in modo, che l' equazione sarà differente solo ne' segni. Ecco perchè se in vece di prendere alcuna di esse per incognita, si prenda la semisomma delle medesime, che chiamisi $2x$; come per le condizioni del problema, è data la differenza DE delle stesse, ed è $= c$, si avrà (*Geom.* 301) $AE =$

$x + \frac{1}{2} c$, ed $AD = x - \frac{1}{2} c$; ed impiegando gli stessi principj adoprati in questa prima soluzione, si avrà l' equazione $(x + \frac{1}{2} c) \times (x - \frac{1}{2} c) = ab$, o sia $x^2 - \frac{1}{4} c^2 = ab$, che è più semplice, e che esibisce $x = \sqrt{\left(\frac{1}{4} c^2 + ab\right)}$. Dal che facilmente si deduce, che AE, che è espressa da $x + \frac{1}{2} c$, sarà $= \frac{1}{2} c + \sqrt{\left(\frac{1}{4} c^2 + ab\right)}$, ed $AD = -\frac{1}{2} c + \sqrt{\left(\frac{1}{4} c^2 + ab\right)}$, come di sopra (270).

Il seguente problema somministrerà varj esempj dell'applicazione dello stesso principio.

274. *Dal punto* D (fig. 27) *dato dentro dell' angolo retto* IAE, *ed equidistante dai suoi due lati* IA, *ed* AE, *tirare una retta* BD *in modo, che la sua parte* CB *compresa nell' angolo retto* EAB *conseguente del dato* EAI, *pareggi una retta data.*

Abbassate le perpendicolari, DE, DI, si può indifferentemente prendere per incognita CE o AB, AC o IB, CD o DB. Si prenda per esempio CE, che chiamisi x, e ciascuna

delle due rette uguali DE, DI pongasi uguale ad a, ed esprimasi con c la data retta, cui dev'essere uguale BC; sarà $AC = AE - CE = a - x$, ed i triangoli simili DEC, CAB daranno $CE : DE :: AC : AB$, cioè $x : a :: a - x : AB$, da cui si ha $AB = \frac{a^2 - ax}{x}$. Ma pel triangolo rettangolo CBA (*Geom.* 164) si ha $AC^2 + AB^2 = BC^2$, in cui sostituendo i valori algebrici, si avrà $(a - x)^2 + \left(\frac{a^2 - ax}{x}\right)^2 = c^2$, o sia $a^2 - 2ax + x^2 + \frac{a^4 - 2a^3 x + a^2 x^2}{x^2} = c^2$, o pure togliendo il denominatore, trasponendo, e riducendo, $x^4 - 2ax^3 + 2a^2 x^2 - c^2 x^2 - 2a^3 x + a^4 = 0$; equazione del quarto grado, ma però che non è la più semplice, che possa impiegarsi per risolvere questo problema.

Se in vece di prendere CE per incognita, prendesi IB, allora ponendo $IB = x$, ed imitando la precedente soluzione, si avrà un equazione, in cui vi sarà $x - a$ in luogo di $a - x$, e che sarà assolutamente la stessa della precedente, perchè tali grandezze sono elevate a quadrato. Quella in cui si prenderà AB per incognita, differirà nei soli segni dall' altra, in cui

si prenderà AC per incognita. In riguardo a DB, e DC, l' equazione in cui una di esse sarà presa per incognita, differirà nei soli segni da quella in cui l' altra si prenderà per incognita: dunque non bisogna prendere alcuna di tali rette.

Ma se prendesi per incognita la somma delle due rette DB e DC, e tal somma chiamisi $2x$, allora (*Geom.* 301) si avrà $DB = x + \frac{1}{2}c$, e $DC = x - \frac{1}{2}c$; or le parallele DI e CA, per trovare AB ed AC, offrono le due seguenti proporzioni $DC : CB :: IA$ o $DE : AB$, e $DB : CB :: DI : AC$; cioè $x - \frac{1}{2}c : c :: a : AB$, ed $x + \frac{1}{2}c : c :: a : AC$; dunque $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$, ed $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$; e come il triangolo rettangolo CAB offre $AB^2 + AC^2 = BC^2$, così $\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = c^2$; o pure, levando i fratti, e dividendo per c^2, $a^2(x + \frac{1}{2}c)^2 +$

$a^2 (x - \frac{1}{2} c)^2 = (x + \frac{1}{2} c)^2 \times (x - \frac{1}{2} c)^2$; e facendo le indicate operazioni, trasponendo, e riducendo, si ha $x^4 - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2a^2\right) x^2 = \frac{1}{2} a^2 c^2 - \frac{1}{16} c^4$, la quale invero è anche di quarto grado, ma però che si risolve (173) come quelle del secondo.

Si perverrà anche ad equazioni assai semplici, se impieghansi due incognite, una delle quali sia la somma delle due rette *AB* ed *AC*, e l'altra la differenza di esse, cioè se si fa $AB + AC = 2x$, ed $AB - AC = 2y$, lo che darà $AB = x + y$, ed $AC = x - y$; il triangolo rettangolo *ABC* darà $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ed i triangoli simili *ABC*, *IBD* daranno (*Geom.* 209) $AB : AC :: IB : ID$; da cui si avranno le due equazioni necessarie per determinare x ed y; da una si rileverà il valore di x^2, che sostituito nell'altra, darà per y una equazione di secondo grado. Ma si lasci a Principianti di compir questo calcolo per esercitarsi, e si ritorni alla stabilita equazione.

Conformemente a ciò che si è esposto (173), si avrà $x^4 - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2a^2\right) x^2 + \left(\frac{1}{4} c^2 + a^2\right)^2$

$=\left(\frac{1}{4}c^2 + a^2\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 c^2 - \frac{1}{16}c^4 = a^2 c^2 + a^4$; estraendo la radice quadrata, $x^2 - \left(\frac{1}{4}c^2 + a^2\right) = \pm \sqrt{(a^2 c^2 + a^2)}$, onde $x^2 = \frac{1}{4}c^2 \mp a^2 \pm \sqrt{(a^2 c^2 + a^4)}$: finalmente estraendo di nuovo la radice quadrata, si avrà $x = \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}c^2 + a^2 \pm \sqrt{(a^2 c^2 + a^4)}\right]}$, o sia $x = \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}c^2 + a^2 \pm a\sqrt{(c^2 + a^2)}\right]}$.

Dei quattro valori di x, che si hanno dalla doppia combinazione dei due segni $\pm$, un solo appartiene alla quistione, che è stata proposta, e questo è $x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + a^2 + a\sqrt{(c^2+a^2)}\right)}$.

Il valore $x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + a^2 - a\sqrt{(c^2+a^2)}\right)}$ risolve il problema pel caso, nel quale si dimanderebbe che la retta CB fosse nello stesso angolo, in cui è il punto D, *veggasi* (*figura 28*); ed allora x non rappresenta la semisomma, ma la semidifferenza delle due rette BD, e DC; del che è facile convincersi chiamando $2x$ questa differenza, e risolvendo il problema nello stesso superiore modo; perchè si avrà $DB = \frac{1}{2}c + x$, CD

$= \frac{1}{2} c - x$, e le parallele DI, e CA daranno $DB : CB :: DI : CA$, e $DC : CB :: AI : AB$, o sia $\frac{1}{2} c + x : c :: a : CA$, ed $\frac{1}{2} c - x : c :: a : AB$; dunque $CA = \frac{ac}{\frac{1}{2} c + x}$, ed $AB = \frac{a c}{\frac{1}{2} c - x}$, onde pel triangolo rettangolo CAB si avrà $\frac{a^2 c^2}{\left(\frac{1}{2} c + x\right)^2} + \frac{a^2 c^2}{\left(\frac{1}{2} c - x\right)^2} = c^2$, o in seguito delle stesse operazioni di quì sopra, $x^4 - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 a^2\right) x^2 = \frac{1}{2} a^2 c^2 - \frac{1}{16} c^4$, equazione che assolutamente è la stessa di quella, che si è trovata per la somma delle due rette BD, e DC (*fig.* 27). Dunque la stessa equazione soddisfacendo ai due casi, una delle due radici deve dar la somma, e l' altra la differenza; ora facilmente si vede, che le due radici, che debbonsi prendere son quelle indicate, poichè le due altre essendo tutte negative, debbono appartenere a casi totalmente opposti a quelli, che sonosi considerati in ciascuna soluzione.

In quanto a queste due altre radici, per trovare a quali casi esse appartengono bisogna osservare, che nel

presente problema, o almeno nell' equazione, niente determina, se il punto D (*fig.* 27) è (come si è supposto da principio) al di sotto di AI ed a sinistra di AE, o al contrario, se egli è al di sotto della prima retta, ed a destra della seconda, come qui vedesi in riguardo di $A'I'$ ed $A'E'$; ora in questo caso la grandezza a è negativa perchè cade da' lati opposti a quelli, nei quali prima cadeva; dunque si avrà la soluzione competente a questo caso, se nell' equazione $x^4 - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2a^2\right)x^2$, ec. rinvenuta quì sopra, vi si pone $-a$ in vece di $+a$, ma come allora tale equazione non si altera, così ne segue che questa stessa equazione deve anche risolvere questi nuovi due casi. Dunque gli altri due valori di x sono uno la somma delle due rette DB', DC' (*fig.* 27), e l' altro la differenza di esse (*fig.* 28). Ed in fatti vedesi, che in questa nuova posizione, i punti B e C cadono dai lati opposti a quelli in cui prima cadevano, e che quindi sì la somma, che la differenza delle due rette DB' e DC' dev' esser negativa, come in fatti l' esibisce l' equazione.

Per costruir la trovata soluzione, su di AE prolungata (*fig.* 27 e 28) si prenderà la parte $AN = c$, e tirata IN, quest' ultima si porterà su di DI prolungata da I in K: su di DK come diametro si descriverà il semicerchio KLD, che sarà incontrato in L da AI prolungata. Dal punto medio H di AN si tirerà IH, che si porterà da I in M (*fig* 27),

e si avrà LM pel primo valore di x; ma nella figura 28, col centro L e con un raggio uguale ad IH, si descriverà un archetto, che taglierà IK in M, ed IM sarà il secondo valore di x; e poichè si ha $BD = x + \frac{1}{2} c$, perciò si avrà $BD = LM + AH$ (*fig.* 27), e $BD = IM + AH$ (*fig.* 28); così rimarrà solo a descrivere col centro D, e col raggio BD, che ora si è determinato, un arco, che taglierà IA prolungata in B, e DB sarà la chiesta retta. In fatti, il triangolo rettangolo IAN (*fig.* 27 e 28) esibisce IN o sia $IK = \sqrt{(IA^2 + AN^2)} = \sqrt{(a^2 + c^2)}$, e per essere LI media proporzionale tra DI ed IK, si ha $IL^2 = DI \times IK = a\sqrt{(a^2 + c^2)}$, ma il triangolo rettangolo IAH offre IH, o $IM = \sqrt{(IA^2 + AH^2)} = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} c^2)}$, e per l'altro triangolo rettangolo LIM (*fig.* 27), si ha $LM = \sqrt{(MI^2 + IL^2)} = \sqrt{[a^2 + \frac{1}{4} c^2 + a\sqrt{(a^2 + c^2)}]} = x$; e (*fig.* 28) $IM = \sqrt{(LM^2 - IL^2)} = \sqrt{[a^2 + \frac{1}{4} c^2 - a\sqrt{(a^2 + c^2)}]} = x$.

Relativamente a quest'ultimo valore bisogna osservare, che la costruzione esibita suppone,

che IH (*fig.* 28) è maggiore di LI, o al più eguale. Se essa fosse minore, il problema sarebbe impossibile per quest' ultimo caso; lo che è anche indicato dall' Algebra; perchè nel valore di $x = \sqrt{[a^2 + \frac{1}{4} c^2 - a\sqrt{(a^2+c^2)}]}$, se $a^2 + \frac{1}{4} c^2$, che è IH^2, è minore di $a\sqrt{(a^2+c^2)}$, che è IL^2, la grandezza sottoposta al radicale universale sarà negativa, e perciò il valore di x sara immaginario.

Prendendo per incognita la somma delle due rette DB e DC (*fig.* 27) o la differenza di esse (*fig.* 28), si è giunto ad una equazione più semplice, che se si fosse presa, CE, o AC, o AB, o IB, perchè il rapporto delle rette DB, e DC colle altre IB ed AB è simile a quello che le stesse DB e DC serbano con AC e CE, cioè che esse posson determinarsi con simili operazioni impiegando IB ed AB, o AC e CE. In generale, come l' equazione deve contenere tutti li differenti rapporti, che la grandenza cercata può avere con quelle da cui essa dipende; così tale equazione sarà sempre tanto più semplice, quanto la grandezza, che si sceglierà per incognita, avrà meno rapporti differenti colle altre, ec-

vone un esempio molto sensibile in quest' altra soluzione dello stesso problema.

275. Poichè l' angolo CAB (*fig.* 29) è retto, perciò si capisce, che su di CB come diametro se descrivesi il semicerchio, esso passerà pel punto A: si tira la retta DA, che prolungata incontra la circonferenza in M; allora facilmente si vede, che per essere uguali le rette DI, DE, l' angolo DAI, o il suo uguale BAM sarà di 45 gradi; ed avendo quest' ultimo per misura la metà dell' arco MB (*Geom.* 63), questo sarà dunque di 90°, onde se si tira il raggio LM, il triangolo DLM sarà rettangolo, per cui abbassando su DM la perpendicolare LN, il lato LM (*Geom.* 112) sarà medio proporzionale tra DM ed MN, o tra DM, ed AN, perchè la perpendicolare LN rende $AN = NM$ (*Geom.* 52). Da ciò è facile avere una semplicissima soluzione; prendendo AN per incognita.

Chiamando x questa retta AN, e d la cognita DA, allora DM sarà $d + 2x$, ma per quel che si è osservato, si ha $DM : ML :: LM : MN$, dunque $d + 2x : \frac{1}{2} c :: \frac{1}{2} c : x$, per cui $dx + 2x^2 = \frac{1}{4} c^2$, o sia $x^2 + \frac{1}{2} dx = \frac{1}{8} c^2$,

e risolvendo questa equazione, risulta $x =$ $-\frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{8}c^2\right)}$.

Per costruire tal grandezza ponesi sotto questa forma $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$. Su dei lati Ao, AI dell' angolo retto IAo, si prendono le parti Am, An ciascuna uguale ad $\frac{1}{4}c$, e compiendo il quadrato $Ampn$, vi si tira la diagonale Ap, che sarà perpendicolare a DA ed uguale a $\sqrt{\left(\frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$; si prende di più su di AD la parte $Ar = \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}AD$, e tirando pr, si ha $pr = \sqrt{(Ar^2 + Ap^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$, dunque per avere il primo valor di x, devesi solamente sottrarre $\frac{1}{4}d$ da pr, lo che si esegue descrivendo col centro r, e col raggio rp un arco che taglia DM in N, determinandosi così AN pel primo valore di x; in modo che tirando su di essa dal punto N la perpendicolare NL, che si farà tagliare in L da un arco descritto col centro A e col raggio $\frac{1}{2}c$, si

avrà il punto L, pel quale e per l'altro D tirando DCB, si avrà la soluzione.

In quanto al secondo valore $x = -\frac{1}{4} d - \sqrt{\left(\frac{1}{16} d^2 + \frac{1}{16} c^2 + \frac{1}{16} c^2\right)}$, si otterrà portando rp da r in N', perchè allora essendo $AN' = Ar' + rN'$, essa equivalerà ad $\frac{1}{4} d + \sqrt{\left(\frac{1}{16} d^2 + \frac{1}{16} c^2 + \frac{1}{16} c^2\right)}$, cioè sarà uguale al secondo valore di x cambiandovi i segni, e come essa cade dal lato opposto alla prima, così avuto riguardo a tutto, la medesima sarà il vero valor di x in questo secondo caso. Dunque dal punto N' anche si eleverà la perpendicolare $N'L'$, che si taglierà in L' con un arco descritto parimente col centro A e col raggio $\frac{1}{2} c$; allora tirando pel punto L' e per l'altro D la retta $B'L'D$, si avrà la seconda soluzione, di cui può esser capace il problema: di qual cosa facilmente si può rimaner convinto applicando sulla figura 30 tutto ciò, che si è detto sulla figura 29 dal principio di questa soluzione: si vedrà, che chiamando x AN o MN, e conservando tutte le medesime denominazioni, si avrà $DM : ML :: ML : MN$,

cioè $2x - d : \frac{1}{2} c :: \frac{1}{2} c : x$, e per conseguenza $2x^2 - dx = \frac{1}{4} c^2$ da cui si ha $x = \frac{1}{4} d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16} d^2 + \frac{1}{16} c^2 + \frac{1}{16} c^2\right)}$; dei quali due valori, uno è precisamente lo stesso, che quello di cui trattasi, i segni sono soltanto differenti, come in fatti dev' essere.

Ma quì si presenta di fare un' importante riflessione. Può accadere che l' arco, che si vorrà descrivere col centro *A* (*fig.* 29), e col raggio $\frac{1}{2} c$, non incontra la perpendicolare $N'L'$, perchè la grandezza $\frac{1}{2} c$ può esser minore di AN'. Or si è detto, che quando i problemi di secondo grado sono impossibili, l' Algebra lo dinota: intanto dall' equazione $x = -\frac{1}{4} d - \sqrt{\left(\frac{1}{16} d^2 + \frac{1}{16} c^2 + \frac{1}{16} c^2\right)}$, non si rileva in alcun modo in quali casi ha luogo questa impossibilità, perchè tutto ciò che esiste sotto del radicale, è necessariamente positivo.

Ecco lo snodamento di questa difficoltà. È indubitato, che quando un problema espresso algebricamente è impossibile, che l'algebra manifesta questa impossibilità; ma bisogna ri-

flettere attentamente, che ciò accade, quando coll'algebra medesima si è espresso tutto quello, che suppone il problema, sia esplicitamente, sia implicitamente; or questo è precisamente quello, che quì non si avvera. Infatti, il problema suppone tacitamente, che i tre punti D, A, L non istanno per dritto; e questo appunto è quello che non si è espresso algebricamente; si è espresso che LM era media proporzionale tra DM, ed MN, proprietà che appartiene al triangolo rettangolo, ma che può aver luogo, quando i tre punti D, A, L son supposti in linea retta. In fatti è chiaro, che si può proporre questo problema: *Trovare sulla retta indeterminata* DL (fig. 31), *una tale parte* AM *giacente tra le altre sue due parti* DA *ed* ML *date di magnitudine*, *che* ML *sia media proporzionale tra* DM *ed* MN, *posto che* N *sia il punto medio di* AM. Or questo problema, come facilmente se ne può assicurare, conduce precisamente alla stessa superiore equazione, e questa offre due soluzioni, una pel caso in cui i due punti A ed M sono tra D ed L, l'altra pel caso contrario. Dunque non deve sorprendere, che l'algebra niente dinota quando il primiero problema diviene impossibile (almeno in uno di

questi casi); poichè essa deve esibire la soluzione di questo secondo problema, ch'è sempre possibile.

276. Questa riflessione conduce a distinguere due specie di problemi, cioè i *concreti*, e gli *astratti*. Per i primi debbonsi intender quelli della natura dell' antipenultimo, ove tutto ciò che cercasi è specificato o particolarizzato con qualche condizione, qualche proprietà, o qualche particolare costruzione, che l'equazione non esprime. I secondi al contrario, saran quelli ove le grandezze son considerate unicamente come grandezze, ed ove l'equazione esprime tutto ciò, che contiene il problema, come appunto è l' ultimo di quelli, che si son recati. Questi posson sempre avere tante soluzioni sia positive, sia negative, quante reali ne ha l' equazione: mentre che il numero delle soluzioni di un problema concreto spesso è minore anche del numero delle soluzioni positive dell' equazione; il seguente problema, ch'è di quest' ultima specie, ne somministra un esempio.

277. Suppongasi che $ABED$ (*fig*. 32) rappresenti una sfera, generata dal rivolgimento del semicerchio ABE, intorno del suo diametro AE. In tal rivolgimento, il settore ABC

genera un settore sferico, ch'è composto dal segmento sferico generato dal semisegmento circolare ABP, e dal cono retto generato dal triangolo rettangolo BPC. Suppongasi voler sapere, quando saranno uguali tal cono, ed il settore sferico.

Per risolvere questo problema, bisogna ricordarsi (*Geom.* 247), che il settore sferico si ottiene moltiplicando la sua superficie sferica BAD, pel terzo del raggio AC. Ma tal superficie sferica (*Geom.* 225) si ha moltiplicando la sua altezza AP, per la periferia del cerchio massimo $ABED$. Dunque ponendo $AC = a$, $AP = x$, ed esprimendo per $r : c$ il rapporto del raggio di un cerchio, alla sua circonferenza; fatta la proporzione $r : c :: a$: al quarto proporzionale, che sarà $\frac{ac}{r}$, questo darà la circonferenza $ABDE$; dunque la superficie sferica BAD del settore, sarà $= \frac{acx}{r}$, e la sua solidità $= \frac{acx}{r} \times \frac{1}{3} a = \frac{a^2cx}{3r}$.

Per avere la solidità del cono, bisogna moltiplicare la sua base, cioè il cerchio che ha per raggio BP, pel terzo dell' altezza CP: ma $CP = CA - AP = a - x$, e $CB = a$, dunque nel triangolo rettangolo BPC, si ha $BP = \sqrt{(CB^2 - PC^2)} =$

$\sqrt{(a^2 - a^2 + 2ax - x^2)} = \sqrt{(2ax - x^2)}$; dunque facendo $r : c :: \sqrt{(2ax - x^2)}$: al quarto proporzionale, che sarà $= \frac{c\sqrt{(2ax - x^2)}}{r}$, questo esprimerà la periferia del raggio BP: onde la superficie di tal cerchio, sarà $= \frac{c\sqrt{(2ax - x^2)}}{r} \times \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{2} = \frac{c(2ax - x^2)}{2r}$; quindi moltiplicando questa, pel terzo di CP, o sia per $\frac{a - x}{3}$, si avrà il cono generato dal triangolo rettangolo $BPC = \frac{c(2ax - x^2)}{2r} \times \frac{a - x}{3} = \frac{c(2ax - x^2)(a - x)}{2.\ 3.\ r}$. Ora affinchè il cono pareggi il segmento bisogna, che il settore, il quale è somma di ambedue, sia doppio o dell'uno, o dell'altro, bisogna dunque che $\frac{a^2 cx}{3r} = \frac{2c(2ax - x^2)(a - x)}{2.\ 3.\ r} = \frac{c(2ax - x^2)(a - x)}{3r}$; e questa è l'equazione, che scioglierà il problema, la quale si può semplicizzare sopprimendovi $3r$ comun divisore dei suoi membri, e cx comun fattore di essi, riducendosi così la medesima ad $a^2 = (2a - x) \times (a - x)$, o sia ad $x^2 - 3ax = - a^2$; da cui colle regole della prima Sezione, si ha $x =$

$\frac{3}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}a^2\right)}$. Ora di queste due radici, la sola $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{5}{4}a^2\right)}$ può soddisfare, perchè è evidente, che $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\left(\frac{5}{4}a^2\right)}$ essendo maggiore di $2a$, cioè del diametro, la soluzione da essa indicata, non può convenire alla sfera.

Se vuol costruirsi la soluzione $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{5}{4}a^2\right)}$, si porrà sotto di questa forma $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{9}{4}a^2 - a^2\right)}$; e presa $AM = \frac{3}{2}a$, su di essa come diametro, si descriverà il semicerchio AOM, in cui applicatavi la corda $AO = A$, si tirerà OM, che si porterà verso A da M in P; e 'l punto P ove essa terminerà, ne darà l'altezza $AP = x$. In fatti, pel triangolo rettangolo AOM, si ha OM o sia $MP = \sqrt{(AM^2 - AO^2)} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}a^2 - a^2\right)}$; dunque $AP = AM - MP = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{9}{4}a^2 - a^2\right)} = x$.

In quanto alla seconda soluzione $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\left(\frac{5}{4}a^2\right)}$ essa come si è detto, non appar-

tiene in alcun modo al presente problema ; ma però spetta, come pure la prima, a quest'altro problema astratto, somministrato dalla lettura dell'equazione $x^2 - 3ax = -a^2$, osia $3ax - x^2 = a^2$. *Divisa la data retta* AN (fig. 33.) *in tre parti uguali nei due punti* B e D ; *trovar nella sua direzione un punto* P *tale*, *che la parte* AD *sia media proporzionale tra le distanze*, *che il punto* P *serba dai suoi estremi* A *ed* N. In fatti, se chiamasi a il terzo AD della data retta AN, ed AP, x, si avrà $PN = 3a - x$; e le condizioni del problema danno questa proporzione $x : a :: a : 3a - x$, da cui si ha questa equazione $3ax - x^2 = a^2$, le cui radici sono $x = \frac{3}{2} a \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4} a^2\right)}$ come quì sopra, e si avranno ambedue anche colla stessa costruzione, eccetto che per la seconda $x = \frac{3}{2} a + \sqrt{\left(\frac{5}{4} a^2\right)}$, si porterà MO da M in P' verso N, ed allora AP ed AP' saranno i due valori di x.

Altre applicazioni dell' Algebra, a diversi oggetti.

278. Per risolvere l'ultimo problema, si è stato nell'obbligo di calcolare l'espressione

algebrica di un settore sferico, e del cono che ne fa parte. I corpi considerati in Geometria, rinvengonsi spesso in più problemi, e particolarmente nei Fisico-matematici, perchè essi sono gli elementi di tutti gli altri. Dunque convien rendersi familiari le algebriche espressioni, o della totalità di essi, o delle parti dei medesimi. Oltre che ciò sara utile nella quarta parte di questo corso, e ne somministrerà l' occasione di far vedere l' utilità dell' Algebra anche per paragonar tali corpi, e per misurar quelli che rapportar vi si possono.

Se si rappresenta generalmente per $r:c$ il rapporto del raggio di un cerchio, alla sua circonferenza [rapporto, che si conosce con una più che sufficiente esattezza (*Geom.* 159) per la pratica], in tal caso la circonferenza di ogni altro cerchio del raggio a, sarà $\frac{ac}{r}$, e la sua superficie sarà $= \frac{ac}{r} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2c}{2r}$.

Da ciò vedesi, che le superficie dei cerchi crescono come i quadrati dei raggi di essi; perchè essendo $\frac{c}{2r}$ sempre dello stesso valore, la grandezza $\frac{a^2c}{2r}$ cresce a proporzione, che cresce a^2.

Se h è l'altezza di un cilindro, il raggio della cui base è a, si avrà (*Geom.* 237) $\frac{a^2 c}{2r} \times h$ per la sua solidità: similmente si avrà $\frac{a'^2 c}{2r} \times h'$, per la solidità di un altro cilindro, la cui altezza sarà h', ed a' il raggio della sua base; in modo che le solidità di essi saranno $:: \frac{a^2 c}{2r} \times h : \frac{a'^2 c}{2r} \times h' :: a^2 h : a'^2 h'$, sopprimendo il comun fattore $\frac{c}{2r}$; cioè, che le solidità di essi son come i prodotti delle altezze dei medesimi, per i quadrati dei raggi delle basi dei stessi. Se le altezze sono proporzionali ai raggi delle basi di essi, allora $h : h' :: a : a'$, onde $h' = \frac{a' h}{a}$, ed $a'^2 h' = \frac{a'^3 h}{a}$, per cui $a^2 h : a'^2 h' :: a^2 h : \frac{a'^3 h}{a} :: a^3 : a'^3$ (sopprimendo il comun fattore h, e moltiplicando per a); cioè le solidità di essi saran come i cubi dei raggi delle rispettive basi.

Generalmente le superficie, come si è veduto in Geometria, dipendono dal prodotto di due dimensioni, ed i solidi da quello di tre; così se ciascuna dimensione di uno dei due solidi, o delle due superficie, che si paragonano, è a ciascuna dimensione dell'altro, in uno stesso rapporto, tali superficie saran come i quadrati, e tali solidi come i cubi di due dimensioni omologhe; ed anche più generalmente,

se due qualunque grandezze della stessa natura sono espresse sì l' una, che l' altra dal prodotto di quanti fattori si vogliano, e se ciascun fattore dell' una sta a ciascun fattore dell' altra, in uno stesso rapporto; queste due grandezze saran come due fattori omologhi di esse, elevati ciascuno alla potenza indicata dal numero dei medesimi. Per esempio, se una grandezza è espressa da $abcd$, ed un' altra da $a'b'c'd'$, è chiaro che esse saran $:: abcd : a'b'c'd'$, dunque se $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, sarà $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$; ed $a'b'c'd'$ $= a' \times \frac{a'b}{a} \times \frac{a'c}{a} \times \frac{a'd}{a} = \frac{a'^4 bcd}{a^3}$, per cui $abcd : a'b'c'd' :: abcd : \frac{a'^4 bcd}{a^3} :: a : \frac{a'^4}{a^3} :: a^4 : a'^4$.

Lo stesso accaderà, quando tali grandezze non saranno espresse con monomj; per esempio, se sono espresse, una per $ab + cd$, e l'altra per $a'b' + c'd'$; posto che le dimensioni della prima, son proporzionali a quelle della seconda, tali grandezze saranno $:: a^2 : a'^2$; in fatti perchè $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, si avrà $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, per cui il rapporto $ab + cd : a'b' + c'd'$ diverrà $ab + cd$:

$\frac{a'^2 b}{a} + \frac{a'^2 cd}{a^2}$, o sia $ab + cd : \frac{a'^2\ ab + a'^2\ cd}{a^2}$, o pure $a^2 (ab + cd) : a'^2 (ab + cd)$, o final. $a^2 : a'^2$.

Quest' ultima osservazione dimostra in un modo generale, che le superficie delle figure simili, sono come i quadrati di due delle loro dimensioni omologhe; e come i cubi di queste, le solidità dei solidi simili; perchè qualunque sieno tali figure, o tali solidi, le prime possonsi sempre considerare come composte di triangoli simili, di cui le basi, e le altezze son proporzionali in ciascuna figura; e gli ultimi posson considerarsi come composti di piramidi simili, le cui tre dimensioni sono anche proporzionali.

Da ciò vedesi come possonsi facilmente paragonar le grandezze, quando se ne ha l'algebrica espressione, sieno esse della stessa, o pure di diversa specie, come un cono ed una sfera, un prisma ed un cilindro, purchè sien solo della stessa natura, cioè o amendue solidi, o amendue superficie, o ec.

279. Si è detto (*Geom.* 243) come proceder si deve per avere la solidità di un tronco di piramide, o di un cono. Se dunque chiamasi h l'altezza dell'intera piramide, ed h' l'altezza della piramide tolta; s la super-

ficie della base inferiore, ed s' quella della base superiore, si avrà (*Geom.* 202) $s : s' :: h^2 : h'^2$; onde $h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$, o sia $h' = h \sqrt{\frac{s'}{s}}$; ma se chiamasi k l'altezza del tronco, sarà $k = h - h' = h - h\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{h\sqrt{s} - h\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$; da cui si ha $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$. Or la solidità dell'intera piramide è $s \times \frac{h}{3}$, e quella della piramide tolta è $s' \times \frac{h'}{3} = s' \times \frac{h}{3}\sqrt{\frac{s'}{s}}$, col sostituire in vece di h' il suo valore già ritrovato; dunque la solidità del tronco $= \frac{hs}{3} - \frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}} = \frac{h}{3}\left(s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right) = \frac{h}{3}\left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right)$; pongasi dunque per h il suo trovato valore, e si avrà $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s} - \sqrt{s'})} \times \left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right)$, che riducesi a $\frac{k}{3}\left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}\right)$, o sia a $\frac{k}{3} \times (s + \sqrt{ss'} + s')$, col dividere per $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$; lo che dimostra, che ogni piramide o cono troncato, è composto di tre piramidi della stessa altezza k, delle quali la prima ha per base, la base inferiore s del tronco, la seconda, la base superiore s' di esso, e la terza, la media proporzionale $\sqrt{ss'}$, tra la base superiore s' e l'inferiore s; perchè per avere la solidità di queste tre piramidi della stessa altezza, basta moltiplicare la somma $s + \sqrt{ss'} + s'$ delle basi di esse, per $\frac{k}{3}$ ch' è il

terzo della comune altezza k delle medesime, come appunto vien dinotato dalla trovata analitica grandezza.

280. Se a rappresenta il raggio di una sfera, $\frac{ca^2}{2r}$ sarà la superficie del suo cerchio massimo; $\frac{4ca^2}{2r}$, o sia $\frac{2ca^2}{r}$ sarà la superficie della stessa sfera; e perciò $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3} a$, o sia $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ sarà la sua solidità (*Geom.* 222 e 244).

Se chiamasi x l'altezza di un qualunque segmento di essa, si avrà, come si è veduto nell'ultimo problema, $\frac{a^2cx}{3r}$ per la solidità del settore, e $\frac{c}{2r} \times (2ax - x^2) \times \frac{a-x}{3}$ per quella del cono in esso contenuto; dunque (*Geom.* 248) quella del segmento sarà $\frac{a^2cx}{3r} - \frac{c}{2r} \cdot (2ax - x^2) \cdot \frac{a-x}{3} = \frac{c}{3r} \cdot [a^2x - \frac{2ax - x^2}{2} \times (a - x)] = \frac{c}{3r} \cdot \frac{2a^2x - 2a^2x + ax^2 + 2ax^2 - x^3}{2} = \frac{c}{3r} \cdot \frac{3ax^2 - x^3}{2} = \frac{cx^2}{2r} \times (a - \frac{1}{3}x)$; cioè la solidità di un segmento sferico è uguale al prodotto del cerchio, che ha per raggio la sua altezza, moltiplicato pel raggio sferico diminuito del terzo di tale altezza.

Quando si ha l' algebrica espressione delle grandezze facilmente risolvonsi varj problemi che possono riguardarle.

Per esempio, se cercasi l'altezza di quel cono, che sarà uguale ad una data sfera, e che avrà per raggio della sua base quello della stessa sfera: chiamando h la sua altezza, ed a il raggio della sua base, la sua solidità sarà espressa per $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3}$; ma esso deve pareggiar la sfera anche del raggio a, dunque si avrà $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$, in quale equazione sopprimendo in ciascun membro il comun fattore $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2}{3}$, si ottiene $h = 4a$.

Questo valor di h dinota, che l' altezza del cono dev' essere dupla del diametro della data sfera, come in fatti esser deve; perchè essendo la sfera (*Geom.* 256) li $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscrittole, dev' esser dupla del cono, che con tal cilindro ha la stessa base e la stessa altezza, e perciò uguale ad un cono della medesima base, e di doppia altezza.

281. Per esibirne anche un altro esempio, propongasi questo problema: *Conoscendo il peso di una sfera nell' aria, ed anche nell' acqua; determinarne il raggio.*

Per risolverlo, si supporrà un principio d' idrostatica, che verrà dimostrato nella quarta Parte di questo Corso. Tal principio è, che un corpo nell' acqua, o in qualunque altro fluido, perde tanto del suo peso

quanto pesa un volume di quel fluido uguale al suo. Ciò posto suppongasi che p è il peso di un pollice cubico di acqua, ed x il raggio della sfera incognità che si cerca, cioè il numero di pollici di questo raggio. Dunque la solidità di tale sfera sarà $\frac{2cx^3}{3r}$, e per avere il peso di un pari volume di acqua, bisognerà moltiplicare tal grandezza per p, poichè pesando p un pollice cubico di acqua, un volume di acqua espresso da $\frac{2cx^3}{3r}$ deve pesare p volte tanto; cioè deve pesare $\frac{2pcx^3}{3r}$; suppongasi dunque, che la chiesta sfera nell'aria abbia il peso P; allora, secondo l'esposto principio, essa nell'acqua deve pesare $P - \frac{2cpx^3}{3r}$; e supponendo che P' sia il peso della medesima nell'acqua, si avrà $P - \frac{2cpx^3}{3r} = P'$, per cui $\frac{2cpx^3}{3r} = P - P'$, o sia $x^3 = \frac{(P - P') \times 3r}{2cp}$, ed estraendo la radice cubica, si otterrà $x = \sqrt[3]{\left[\frac{(P - P') \times 3r}{2cp}\right]}$.

Per darne un' applicazione suppongasi, che la sfera di cui trattasi pesi 5 once nell'aria, e 2 once nell'acqua; e che un piede cubico di acqua pesi 72 libbre, da cui deriva, che contenendosi 1728 pollici in un piede cubico, ogni pollice cubico di acqua peserà $\frac{72}{1728}$ di libbra, o sia $\frac{1}{24}$ di essa, cioè $\frac{16}{24}$ o $\frac{2}{3}$ di oncia: di più prendasi il rapporto di 113 : 355 per quello del

diametro alla periferia, sarà $\frac{113}{2}$: 355 quello di $r : c$, dunque si avrà $p = \frac{2}{3}$, $P = 5$, $P' = 2$, $r = \frac{113}{2}$, $c = 355$, per cui $x = \sqrt[3]{\left[\frac{(5-2)\times 3\times\frac{113}{2}}{2.\ 355.\ \frac{2}{3}}\right]}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{1017}{2}}{\frac{1420}{3}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3051}{2840}}$, o sia (prendendosi i logaritmi, per maggior facilità) $Lx = \frac{1}{3} L \frac{3051}{2840} = \frac{1}{3}$ ($L\ 3051 - L\ 2840$), ora $L\ 3051 = 3{,}4844422$, e $L\ 2840 = 3{,}4533183$; sottraendo e prendendo il terzo del residuo, si ha $Lx = 0{,}0103746$, che presso a poco corrisponde quasi ad 1,0242; dunque la sfera in quistione tiene un pollice e 242 diecimillesimi di pollice per raggio.

Si è supposto tacitamente, che il globo pel propio peso entrava interamente nell'acqua; ma se al contrario, bisogna aggiungervi un certo peso per farlo tuffare interamente, allor devesi questa grandezza prendere per P', ma nello stesso tempo convien considerare P' come negativa; cioè a dire, che allor si avrà $x = \sqrt[3]{\left[\frac{(P + P')\times 3r}{2\,cp}\right]}$. In fatti essendosi di sopra veduto, che $\frac{2cpx^3}{3r}$ è il peso di un volume di acqua uguale a questo globo, e P il peso dello

stesso nell' aria, $\frac{2cpx^3}{3r} - P$ sarà ciò che esso pesa, diminuito di un pari volume di acqua, e per conseguenza, ciò che bisogna aggiungervi per farlo interamente tuffare; per cui essendo $\frac{2cpx^3}{3r} - P = P'$, se da questa equazione si rileva il valor di x, si avrà appunto quel valore, che poc' anzi si è assegnato pel caso attuale.

Delle Linee curve in generale, e particolarmente, delle Sezioni coniche.

282. La considerazione delle linee curve non è un oggetto di semplice astrazione. Fin tanto che i problemi, che debbonsi risolvere non sorpassano il secondo grado, non vi è bisogno del soccorso di queste linee; ma al di là esse divengon necessarie. Si va dunque a dare un idea generale delle medesime, e degli usi che esse possono avere per la costruzione delle equazioni, cui perviensi nel risolvere i problemi.

Fra le linee curve, che si considerano in Geometria alcune son tali, che ciascuno dei punti di esse può esser determinato con una stessa legge, cioè con simili calcoli, ed operazioni; delle altre, di cui ciascun punto si

determina con una differente legge, cioè con differenti calcoli, ed operazioni; ma questa differenza è essa stessa soggetta ad una legge.

In quanto alle linee tracciate a caso, quali sarebbero, per esempio, i tratti impressi sulla carta, dalla penna di uno scritturale, esse non possono essere l' oggetto di una rigorosa Geometria. Nondimeno le ricerche di cui questa si occupa, conducono anche con procedimenti diretti, e certi ad imitar dei contorni, che non sembrano ad alcuna legge soggetti: e l'arte di unir così con approssimanti rapporti certe grandezze, la cui vera legge o incognita, o troppo composta sarebbe, non è certamente una delle meno utili applicazioni della Geometria, e dell' Algebra; in seguito si presenteranno alcune occasioni di osservarlo.

Per poter descrivere le linee curve che son l' oggetto della Geometria, bisogna dunque conoscer la legge, cui son soggetti i varj punti del contorno di esse. Ora tal legge può darsi in varj modi: cioè, o indicando un procedimento, col quale queste curve posson descriversi con un movimento continuo, tal' è il cerchio, che si descrive facendo girare una retta data in un dato piano, intorno di un punto dato in esso. O pure facendo conoscere

qualche proprietà, che costantemente appartiene a ciascun punto di tale curva: così sapendosi, che ogni angolo nel semicerchio è retto, si può successivamente trovare ciascun punto d'un cerchio, di cui sia dato il diametro, col tirare da un degli estremi A di questo diametro (*fig.* 34) una moltitudine di rette AC, AD, AE, AF, e conducendosi dall'altro estremo B, le rispettive perpendicolari BC, BD, BE, BF; i differenti punti C, D, E, F determinati in tal modo, apparterran tutti alla circonferenza, il cui diametro è AB.

Finalmente questa legge può esibirsi con una equazione, e può sempre supporsi, che essa è data in quest'ultimo modo, perchè gli altri due, che sonosi esposti, servono a trovar le equazioni, da cui vien tal legge espressa. Sotto di quest'ultimo aspetto vansi a considerar principalmente le curve. Questo è il più semplice, e 'l più fecondo per conoscerne le proprietà, le particolarità, e gli usi. Veggasi dunque come un'equazione può esprimere la natura di una curva: e poichè finora conoscesi soltanto la circonferenza del cerchio, perciò da questa si comincia.

283. Suppongasi dunque, che AMB (*fig.* 35)

sia la curva di cui conoscasi per ora la sola proprietà, che la perpendicolare PM abbassata sulla retta AB, da un qualunque punto M di tale curva, sia media proporzionale tra i due segmenti AP, e PB di AB. Veggasi come l'Algebra possa ajutare a trovar ciascun punto di questa curva, e le sue differenti proprietà.

Poste $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; sarà $PB = a - x$, e poichè supponesi PM media proporzionale tra AP e PB, si avrà $x : y :: y : a - x$; per cui $y^2 = ax - x^2$.

Concepiscasi ora divisa AB in un certo numero di parti uguali, in 10 per esempio; e che per ciascun punto di divisione si elevino su di essa le perpendicolari pm, pm, pm, ec. è evidente, che se nella trovata equazione, supponesi successivamente x uguale a ciascuna delle rette Ap', Ap, ec; y diverrà uguale a ciascuna corrispondente retta pm, pm, ec. poichè l'equazione $y^2 = ax - x^2$ esprime che y è sempre media proporzionale tra x ed $a - x$, qualunque da altra parte sia x, quale appunto è la proprietà, che si è supposto spettare a ciascuna perpendicolare pm. Dunque ciascun punto di qnesta curva può successivamente trovarsi, dando successivamente ad x

più valori, e calcolando i corrispondenti valori di y: eccone un esempio.

Nella fatta supposizione, che a è divisa in 10 parti, si avrà $a=10$, onde l'equazione diviene $y^2=10x-x^2$. Se dunque supponesi successivamente $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$, $x=6$, $x=7$, $x=8$, $x=9$, $x=10$; si troverà successivamente $y=\sqrt{9}$, $y=\sqrt{16}$, $y=\sqrt{21}$, $y=\sqrt{24}$, $y=\sqrt{25}$, $y=\sqrt{24}$, $y=\sqrt{21}$, $y=\sqrt{16}$, $y=\sqrt{9}$, $y=\sqrt{0}$; o sia $y=3$; $y=4$; $y=4,5$; $y=4,9$; $y=5$; $y=4,9$; $y=4,5$; $y=4$; $y=3$; $y=0$. Così se successivamente si portino questi valori di y, sulle perpendicolari corrispondenti ai valori 1, 2, 3, ec. di x, i punti m, m, determinati in tal modo, apparterranno tutti ad una curva, che avrà la seguente proprietà, cioè che ciascuna perpendicolare pm, sarà media proporzionale tra le due parti Ap, e pB della retta AB, curva, che in un momento si vedrà essere la circonferenza del cerchio.

Si è osservato precedentemente, che ogni radice pari può avere due valori, l' un positivo, negativo l' altro. Così oltre i già trovati valori di y, si hanno anche quest' altri, $y=-3$; $y=-4$; $y=-4,5$; $y=-4,9$; $y=-5$; $y=-4,9$; $y=-4,5$, $y=-4$; $y=-3$; $y=0$.

Per avere i punti della curva dinotati da questi nuovi valori di y, bisogna conformemente a ciò che varie altre volte si è detto sulle grandezze negative, prolungar le perpendicolari pm, pm, ec. dalla parte opposta,

e portarvi da p in m', le grandezze pm', pm', uguali ciascuna alla sua corrispondente mp.

Se si vuole avere un maggior numero di punti della curva, devesi soltanto supporre divisa AB in un maggior numero di parti, per esempio in 100, cioè supporre $a = 100$; o pure conservando ad a lo stesso primier valore 10, supporre ad x dei valori intermedj fra quelli che gli si sono attribuiti quì sopra; si troveran similmente gli intermedj valori di y, e per conseguenza nuovi punti della curva.

Il valore $y = 0$ trovato quì sopra dinota, che la curva incontra la retta AB nel punto B, in cui $x = a = 10$: poichè avendo allora la perpendicolare pm il valor zero, la distanza del punto m dalla retta AB è nulla. Anche facilmente può vedersi, che la curva deve incontrare la retta AB pure nel punto A: infatti, poichè nei luoghi, in cui la curva incontra questa retta, il valore di y dev'esser zero; per sapere quali sieno questi luoghi, bisogna nell'equazione $y^2 = ax - x^2$ supporre $y = 0$, e così essa riducesi a $0 = ax - x^2$, e perchè $ax - x^2 = x \times (a - x)$, e questo prodotto divien zero in due casi, o quando $x = 0$, o quando $x = a$. Dunque reciprocamente y sarà zero anche in questi due casi; ora è evidente, che $x = 0$ nel punto A ed è

= o nel punto B; dunque la curva incontra effettivamente la retta AB nei punti A e B.

In seguito di questo esempio, può cominciarsi a capire, come un' equazione serve a determinare i differenti punti di una curva. Se ne vedranno degli altri esempj; ma prima spiegheransi certi vocaboli, di cui si farà uso in appresso.

284. Quando con una equazione vuole esprimersi la natura di una curva, si rapportano, o pur s' intende che si rapportano dei punti m, m, ec. relativamente a due rette AB ed OAO date di posizione, sotto di un qualunque dato angolo, acuto, retto o ottuso; ed immaginando che da ciascun punto m, si menano le rette mp ed mp', rispettivamente parallele alle date OAO, ed AB è chiaro, che si conoscerà il sito di questo punto, se si sanno i valori delle rette mp', o sia Ap, e pm; o che val lo stesso, se si sa una di queste rette, e la sua ragione all' altra. Ora quel che si intende quando dicesi, che una equazione esprime la natura di una curva si è, che questa equazione esprime il rapporto, che relativamente a ciascun punto m, giace tra la retta Ap, e l' altro pm, in modo che essendo cognita una di esse, l' equazione fa

conoscere anche l'altra; e deve osservarsi, che secondo che questo rapporto è più o men complicato, la stessa curva è di un grado più o meno elevato.

Le rette Ap, o mp', che misurano la distanza di ciascun punto m da una OAO delle due rette di comparazione, chiamansi le *ascisse*; e le altre mp, o $p'A$, che misurano la distanza di ciascun di quelli punti, dall' altra retta AB di comparazione diconsi le *ordinate*; la retta AB, chiamasi *asse delle ascisse*, ed *asse delle ordinate* la retta OAO. Il punto A, da cui cominciansi a computar le ascisse, chiamasi *origine delle ascisse*, ed *origine delle ordinate*, l' altro punto, da cui cominciansi a computar le ordinate Ap', o sia pm: nella figura 35, questi due punti sono un sol medesimo punto, cioè il punto A; e deve osservarsi che ben possono esser diversi, ma che sempre è più semplice che sieno uno stesso sol punto, a meno che qualche particolar circostanza, non obblighi a far diversamente.

Le rette Ap, pm, con comun nome, chiamansi *le coordinate della curva*; e considerate appartenere indifferentemente ad un qualunque punto della curva, diconsi *le indeterminate*; i stessi nomi dansi pure alle lettere

x ed y, colle quali rappresentansi queste rette Ap e pm.

285. Ritornisi ora alla stabilita equazione, e veggasi come col suo mezzo possansi rilevar le proprietà della curva.

1.° Dal punto medio C di AB, ad un qualunque punto M della curva, se si tira la retta CM; in qualunque luogo che essa si troverà, sempre il triangolo MPC sarà rettangolo, e quindi si avrà $MP^2 + PC^2 = MC^2$, cioè perchè $PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$, sarà $y^2 + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 = MC^2$, ma relativamente ad ogni punto della curva si ha $y^2 = ax - x^2$, dunque sostituendo nel valore di MC^2, un tal valore di y^2; relativamente ad ogni punto della curva si avrà $ax - x^2 + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 = MC^2$, cioè $\frac{1}{4}a^2 = MC^2$, da cui si ha $\frac{1}{2}a = MC$; dunque ciascun punto per esempio M, della curva è equidistinante dal punto C; onde essa è una periferia di cerchio.

2.° Se da un qualunque punto M o m della curva, ai due estremi A, e B di AB, si tirano le due rette MA, ed MB; per i triangoli rettangoli MPA, MPB si avrà $AP^2 +$

$PM^2 = AM^2$, ed $MP^2 + PB^2 = MB^2$, o pur sostituendovi gli algebrici valori, $x^2 + y^2 = AM^2$, ed $a^2 - 2ax + x^2 + y^2 = MB^2$, dunque sommando queste due equazioni, e poi sostituendovi per y^2 il suo valore $ax - x^2$; si avrà $a^2 - 2ax + 2x^2 + 2ax - 2x^2 = AM^2 + MB^2$; cioè $AM^2 + MB^2 = a^2 = AB^2$; proprietà del triangolo rettangolo, la quale per conseguenza fa conoscere, che l'angolo AMB è sempre retto, in qualunque luogo della curva trovasi il punto M; veggasi (*Geom.* 65).

3.° Se nell'equazione $x^2 + y^2 = AM^2$, si sostituisce per y^2, il suo valore $ax - x^2$, si avrà $AM^2 = ax$, da cui si ha questa proporzione $a : AM :: AM : x$, o sia $AB : AM :: AM : AP$; cioè, che la corda AM è media proporzionale tral diametro AB, e 'l segmento, o sia l'ascissa AP; veggasi (*Geom.* 112).

Similmente si troverebbero tutte le altre proprietà del cerchio già dimostrate in Geometria, partendo sempre da questa supposizione, che l'ordinata PM o pm è media proporzionale tra AP e PB, o Ap e pB.

Computando le ascisse dal vertice A del diametro, si è avuta l'equazione $y^2 = ax - x^2$. Ma se esse voglionsi computare dal cen-

tro in modo, che le medesime sono CP, Cp, ec; allora esprimendo ciascuna di queste per z, le AP, Ap, ec. saran ciascuna $\frac{1}{2}a-z$, e le altre PB, pB saran ciascuna $\frac{1}{2}a+z$; ma dalla supposizione $AP : PM :: MP : PB$, dunque sostituendovi gli algebrici valori, sarà $\frac{1}{2}a-z : y :: y : \frac{1}{2}a+z$, e pareggiando tra essi i prodotti degli estremi, e dei medj, sarà $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2$; e questa è l' equazione al cerchio, computando le ascisse dal centro.

Del rimanente ogni proprietà, che essenzialmente appartiene a ciascun punto della curva, darà per questa sempre la stessa equazione, se traducesi algebricamente, almeno finchè prendonsi le stesse ascisse, e le stesse ordinate; ma quando si cambierà l'origine, o la direzione delle coordinate, o tutte le due cose, si potrà avere una differente equazione; nulladimeno essa sarà sempre dello stesso grado. La verità dell' ultima parte di questa proposizione si è già osservata nel cambiamento, che si è fatto delle ascisse; perchè in tal caso in vece dell' equazione $y^2 = ax - x^2$, si è

avuta l'altra $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2$, che è però dello stesso grado. Ma se partesi da quest' altra proprietà, che ciascuna distanza MC dal punto C è sempre la stessa, e propriamente $= \frac{1}{2}a$; allora, chiamando CP, z; e PM, y; pel triangolo rettangolo MPC si ha $y^2 + z^2 = \frac{1}{4}a^2$, da cui risulta $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2$, che è la stessa equazione, benchè dedotta da una differente proprietà.

Della Ellisse.

286. Propongasi ora di esaminare qual sia la curva, che abbia quest' altra proprietà, che la somma $FM + Mf$ (*fig.* 36) delle due rette FM ed Mf menate da ciascun punto del suo perimetro, a due punti F, ed f dati di sito, pareggi sempre una retta a data di magnitudine.

Per trovar le altre proprietà di questa curva, che dicesi *Ellisse*, bisogna cercare una equazione, che esprime qual relazione vi giace, in virtù dell' indicata cognita sua proprietà, tra le perpendicolari PM menate da ciascun suo punto M, su di una retta data

di posizione, come Ff, per esempio, e le distanze FP, o AP di esse da qualche punto F, o A preso ad arbitrio su di Ff.

A tale oggetto congiunti i punti F, ed f dati di sito colla retta Ff, questa si biseghi in C, e si prolunghi da ambe le parti verso A, e verso B in modo, che ciascuna delle CA, CB pareggi $\frac{1}{2}a$ metà della retta a data di magnitudine; e prendasi AB per asse delle ascisse, e 'l punto A per origine di esse. Ciò premesso sarà tutta $AB = a$; e poste la cognita AF, o la sua uguale $Bf = c$, l' ascissa $AP = x$, l' ordinata $PM = y$, e l' altra incognita $FM = z$; sarà $FP = AP - AF = x - c$ (*); $Mf = FM + Mf - FM = a - z$, ed $fP = AB - AP - fB = a - x - c$.

Stabilite queste cose, dai triangoli rettangoli FPM, fPM si ha $FM^2 = MP^2 + PF^2$, ed $fM^2 = MP^2 + Pf^2$, o sia $z^2 = y^2 + x^2 -$

(*) Se il punto M fosse stato preso in un modo, che la perpendicolare MP cadesse tra A ed F, allora FP sarebbe $c - x$; ma ciò non apporterebbe cambiamento alcuno nella finale equazione della curva, perchè nel formar tale equazione impiegavisi il quadrato di FP, che sempre è $x^2 - 2cx + c^2$, o che esso venga da $x - c$, o da $c - x$.

$2cx + c^2$, ed $a^2 - 2az + z^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ac + 2cx + c^2$. Dalla prima di queste due equazioni sottraggasene la seconda, e si sopprima in ciascun membro il termine a^2 che vi si trova, e si ha $2az = 2ax + 2ac - 4cx$, e perciò $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$; dunque sostituendo per z questo suo valore nell' equazione $z^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2$, si avrà $\frac{a^2 x^2 + 2a^2 cx + a^2 c^2 - 4acx^2 - 4ac^2 x + 4c^2 x^2}{a^2} = y^2 + x^2 - 2cx + c^2$, o sia togliendo il denominatore, trasponendo, e riducendo, $a^2 y^2 = 4a^2 cx - 4ac^2 x - 4acx^2 + 4c^2 x^2$, e riducendo il secondo membro a due prodotti, $a^2 y^2 = (4ac - 4c^2)\, ax + (4c^2 - 4ac)\, x^2$, o sia, perchè $(4c^2 - 4ac)\, x^2 = (4ac - 4c^2) \times - x^2$, si ha $a^2 y^2 = (4ac - 4c^2) \times ax + (4ac - 4c^2) \times - x^2 = (4ac - 4c^2)(ax - x^2)$; per cui risulta $y^2 = \frac{4ac - 4c^2}{a^2} . (ax - x^2)$.

Tale è l' equazione della curva, di cui ciascun punto ha la supposta proprietà.

287. Questa equazione può servire a descrivere la curva per assegnazione di punti, col dare ad x successivamente diversi valori, come di sopra si è fatto pel cerchio; e calcolando corrispondentemente i valori

di y. Come proceder si deve della stessa maniera, così si tralascia di farne il calcolo.

288. L'ellisse si può descrivere per assegnazione di punti anche in quest'altro modo; cioè, dopo di aver fatto ciascuna delle CB, CA uguale ad $\frac{1}{2}a$, dividesi AB in due porzioni ad arbitrio Ar, rB, e col raggio una di queste porzioni rB, e col centro quello dei due punti F, f, che in essa esiste, cioè riguardo ad rB, col centro f, descrivesi un arco circolare, che si estende tanto al di sopra, quanto al di sotto di AB, il quale si fa intersegare nei due punti M ed M', da un altro arco circolare descritto coll'altro punto F per centro, e colla rimanente porzione Ar di AB per intervallo. Tutti i punti M ed M' determinati in tal modo, apparterranno tutti all'ellisse, perchè relativamente ad ognun di essi si avvera, che $FM + Mf = Ar + rB = AB = a$.

289. La fondamentale proprietà, in seguito della quale si è trovata l' equazione, offre essa medesima un mezzo molto semplice, per descriver questa curva con movimento continuo. In fatti, presi nel piano ove vuol descriversi tale curva, i due punti F ed f ad arbitrio, in essi si fisseran due chiodetti, ai quali si ligheranno gli estremi di un filo flessibile, maggiore della distanza Ff dei due mentovati punti; indi per mezzo di uno stiletto M si tenderà tal filo, e conservando sempre questa tensione, l' enunciato stiletto si muoverà sì al di sopra, che al di sotto di Ff, finchè coinciderà nella direzione di questa colla sua punta, tanto verso F, quanto verso f; la punta di esso in tal modo de-

scriverà la chiesta curva, perchè in qualunque punto di questa si troverà lo stiletto M, sempre la somma delle due distanze dal medesimo, ai due punti F ed f, sarà uguale a tutta la lunghezza dell'impiegato filo, cioè ad una retta data.

290. Da ciò facilmente si vede, che se il filo è stato preso lungo quanto AB, che la curva passerà per i due punti A e B. Poichè essendo $AC = CB$, ed $FC = Cf$, sarà anche $AF = Bf$, ed $Af = FB$; per cui sarà $AF + Af = Bf + BF$, e ciascuna di tali somme uguale ad AB. L'equazione fa vedere anche lo stesso, perchè per sapere dove la curva incontra la Ff prolungata, bisogna supporre $y = 0$, da qual supposizione si ha $\frac{4ac - 4c^2}{a^2} \cdot (ax - x^2) = 0$; ma del prodotto che costituisce il primo membro di questa equazione, il fattore $\frac{4ac - 4c^2}{a^2}$ non mai può essere $= 0$; dunque sarà $= 0$ l'altro fattore $ax - x^2$; o sia il suo equivalente $x \times (a - x)$, or questo prodotto è $= 0$, o quando $x = 0$, o quando $a - x = 0$, ed $a - x = 0$, quando $x = a$; dunque la curva incontra la retta Ff prolungata, quando $x = 0$, cioè nel punto A, o quando $x = a = AB$, cioè nel punto B.

291. L' equazione fa vedere ancora, che la curva si estende sì al di sopra, che al di sotto di AB, e che vi si estende in un modo totalmente uguale. In fatti, dall' anzidetta equazione si ha $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac - 4c^2}{a^2} . (ax - x^2)\right]}$, lo che dimostra, che relativamente a ciascun valore dell' ascissa x, o sia AP, corrispondono due valori perfettamente uguali di y, o sia di MP, i quali essendo di segno contrario, debbon portarsi da parti opposte relativamente ad AB.

È ancora evidente, che se dal punto medio C di AB si eleva su di essa la perpendicolare DD', che da questa sì il perimetro ellittico, che l' aja sarà divisa in due parti uguali e simili: ciò è una immediata conseguenza della descrizione della curva, e che si può rilevare anche dalla sua equazione, ma che si conchiuderà più facilmente, quando si saran fatte su di tale equazione le osservazioni da farvisi in seguito.

292. Della ellisse la retta AB chiamasi *l' asse maggiore*, e DD' il *minore*. I due punti F, ed f diconsi i *fuochi*. Il punto C il *centro*, ed i punti A, B, D, D' i *vertici* degli assi.

293. Se vuolsi avere il valore dell' ordinata Fm'' procedente dal fuoco, la sua corrispondente ascissa sarà AF, o sia c, e dovrà supporsi $c = x$; allora l' equazione $y^2 = \frac{4ac - 4c^2}{a^2} \cdot (ax - x^2)$, diverrà $y^2 = \frac{4ac - 4c^2}{a^2} \cdot (ac - c^2) = \frac{4(ac - c^2)^2}{a^2}$; per cui estraendo la radice quadrata, si avrà $y = \pm \frac{2(ac - c^2)}{a}$, o sia $Fm'' = \pm \frac{2(ac - c^2)}{a}$, e 'l suo doppio $m'' m''' = \frac{4(ac - c^2)}{a}$; or questa retta $m'' m'''$, o sia la doppia ordinata focale, chiamasi il *parametro* della ellisse. È poichè $\frac{4(ac - c^2)}{a} = \frac{4ac - 4c^2}{a} = 4c - \frac{4c^2}{a}$, e $4c - \frac{4c^2}{a}$ è manifestamente minore di $4c$, perciò *il parametro della ellisse è minore di* $4c$, *cioè del quadruplo della distanza di un vertice dell' asse maggiore, dal fuoco prossimo.*

Se il parametro chiamasi p, sarà $p = \frac{4ac - 4c^2}{a}$, onde $\frac{p}{a} = \frac{4ac - 4c^2}{a^2}$; dunque l' equazione all' ellisse $y^2 = \left(\frac{4ac - 4c^2}{a^2}\right) \cdot (ax - x^2)$ può

mutarsi in quest' altra $y^2 = \frac{p}{a} \cdot (ax - x^2)$, che è più semplice.

294. Se si vuol determinare il valore del semiasse minore CD o sia dell' ordinata centrale, la sua corrispondente ascissa sarà AC, e converrà dunque supporre $x = \frac{1}{2} a$; onde l' equazione all'ellisse $y^2 = \frac{4ac - 4c^2}{a^2} \times (ax - x^2)$, si muterà in quest' altra $y^2 = \frac{4ac - 4c^2}{a^2} \times \left(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{4} a^2\right) = \frac{4ac - 4c^2}{a^2} \times \frac{1}{4} a^2 = \frac{a^2 (4ac - 4c^2)}{4 a^2} = ac - c^2$, o sia $CD^2 = ac - c^2 = c(a - c) = AF \times FB$, da cui si ha $AF : CD :: CD : FB$; cioè il *semiasse minore* CD, *è media proporzionale tra le due distanze, che un dei fuochi tiene dai due vertici dell' asse maggiore.*

Come la retta DD' è una delle più ragguardevoli della ellisse, così introducesi nell' equazione di questa a preferenza di AF, o sia c. Per eseguir ciò, pongasi $DD' = b$, sarà $CD = \frac{b}{2}$; ma si è trovato $CD^2 = ac - c^2$, dunque $\frac{b^2}{4} = ac - c^2$, o sia $b^2 =$

$4ac - 4c^2$, onde l' equazione all' ellisse $y^2 = \frac{4ac - 4c^2}{a^2} \cdot (ax - x^2)$, può cambiarsi in quest' altra $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (ax - x^2)$.

Poichè si ha $p = \frac{4ac - 4c^2}{a}$, sarà $ap = 4ac - 4c^2$, ma qui sopra si è trovato anche $b^2 = 4ac - 4c^2$, dunque $ap = b^2$ sicchè $a : b :: b : p$; cioè *il parametro della ellisse è terza proporzionale in ordine all' asse maggiore, ed al minore di essa.*

295. Se dall' equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$ togliesi il denominatore, si avrà $a^2 y^2 = b^2 (ax - x^2)$, onde $y^2 : ax - x^2 :: b^2 : a^2$, o sia $y^2 : x(a - x) :: b^2 : a^2$, cioè $PM^2 : AP \times PB :: DD'^2 : AB^2$; onde *il quadrato di una qualunque ordinata all' asse maggiore della ellisse, sta al rettangolo delle corrispondenti ascisse, prese da entrambi i vertici; come il quadrato dell' asse minore, sta a quello del maggiore.* E poichè questa proprietà spetta a tutti i punti dell' ellisse, perciò *i quadrati di due qualunque ordinate al suo asse maggiore, saran come i rispettivi rettangoli delle corrispondenti ascisse, prese da entrambi i vertici.*

296. **Se coll'asse maggiore** AB (*fig.* 37) **del**l'ellisse $ADBD'$, per diametro, descrivesi un cerchio, la sua equazione (283) sarà $y^2 = ax - x^2$, la quale riferita all'altra $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$ all'ellisse, ne differisce pel solo fattore $\frac{b^2}{a^2}$ che moltiplica $ax - x^2$; cioè $ax - x^2$ nell'equazione all'ellisse, è moltiplicato pel rapporto che passa tra 'l quadrato dell'asse minore, e quello del maggiore; ora una qualunque ordinata PN di tal cerchio, chiamisi z, l'equazione di esso sarà $z^2 = ax - x^2$; dunque sostituendo questo valore di z^2 nell'anzidetta equazione all'ellisse, si avrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot z^2$, ed estraendo la radice quadrata, sarà $y = \frac{b}{a} \cdot z$, o sia $ay = bz$, da cui si ha $y : z :: b : a$ cioè $PM : PN :: DD' : AB :: CD : AC$, o sia CE; da ciò vedesi dunque, che le ordinate di una ellisse, sono quei segmenti, che nelle ordinate del cerchio descritto coll'asse maggiore di quella per diametro, verso di tale asse si prendono dividendo le ordinate circolari, nella costante ragione del semiasse maggiore di quella ellisse, al minore.

Da ciò è facile di descrivere per assegnazione di

punti una ellisse, per mezzo di un cerchio. E si vede anche, che il cerchio è una ellisse, i di cui assi sono uguali; o il cui semiasse maggiore, pareggia la distanza di un vertice di questo dal fuoco; o il cui parametro uguaglia l'asse maggiore. Poichè se nelle sopra recate equazioni all'ellisse, supponesi $b = a$, o $c = \frac{1}{2} a$, o $p = a$, si ha sempre l'equazione al cerchio, $y^2 = ax - x^2$.

297. Dalle equazioni all'ellisse, che sonosi fin quì trovate, vedesi, che non è di essa, come del cerchio: una sola linea basta a descriver questo, cioè il suo diametro; laddove l'asse maggiore AB (*fig.* 36), non basta a determinar l'ellisse, poichè bisogna sapere anche il suo asse minore b, o il suo parametro p, o la distanza c di un dei vertici dell'asse maggiore, dal fuoco prossimo. Quando si sa l'asse maggiore, è l'anzidetta distanza c, l'ellisse descrivesi facilmente, come si è veduto di sopra. Ma se si ha l'asse maggiore, e'l minore, bisognerà, per descriverla, ritrovarne i fuochi; lo che è facile, poichè descrivendo un cerchio con un dei vertici dell'asse minore per centro, e col semiasse maggiore per raggio, esso taglierà l'asse maggiore in due punti F, ed f, che saranno i fuochi: perchè dovendo la somma $FD + Df$ esser uguale ad a, se le FD, Df saran tra esse uguali, ciascuna delle medesime dovrà pareggiare $\frac{1}{2} a$.

Se poi si dà l'asse maggiore, e'l parametro, prendendo fra essi la media proporzionale, si determinerà l'asse minore; lo che si rileva dalla proporzione a:

$b :: b : p$, trovata quì sopra (294). E determinato l'asse minore, si oprerà come già si è detto.

298. *Se a qualunque punto* M *della ellisse* (fig. 36) , *tirisi dà un dei fuochi* f *la retta* fM, *la qual si prolunghi, fino a che il suo prolungamento* MG , *pareggi l' altra retta* MF *condotta dallo stesso punto* M , *all' altro fuoco* F , *e congiunta* GF , *vi si abbassi da* M *la perpendicolare* MOT , *questa sarà tangente della ellisse in* M, *cioè l' incontrerà solo in tal punto.*

Se ciò si nega, MT incontri, se è possibile, nell'altro suo punto N la curva, e da questo si tirino le NG, NF, Nf. E poichè MO è perpendicolare a GF, ed $MG = MF$ perciò i triangoli MOG, MOF sono perfettamente uguali, per cui $OG = OF$; e dipiù NO è perpendicolare a GF, ed $OG = OF$; dunque i triangoli NOG, NOF sono perfettamente uguali, per cui $NG = NF$, alle quali aggiuntavi la comune Nf, sarà $GN + Nf = FN + Nf$; ma perchè dalla supposizione il punto N è nella curva, perciò $FN + Nf = AB = FM + Mf = GM + Mf = Gf$, onde anche $GN + Nf = Gf$; ma pel triangolo GNf, Gf è minore di $GN + Nf$, dunque essendo GF nello stesso tempo uguale, e mi-

nore di $GN + Nf$, falsa è la supposizione, che MT in un altro suo punto N incontrar possa la curva; onde di questa, quella ne sarà in M tangente.

299. Per la perfetta uguaglianza dei triangoli MOF, MOG si ha l'angolo FMO uguale all'altro OMG, ma questo è uguale al suo verticale fMN, dunque $FMO = fMN$. Cioè *le due rette, che dal contatto di una tangente all' ellisse, vanno ai due fuochi, costituiscono angoli eguali colla tangente.*

L'esperienza fa vedere, che se un raggio di luce cade su di una superficie, si riflette facendo l'angolo di riflessione, uguale à quello d'incidenza; dunque se F è un punto luminoso, tutti i raggi, che partendosi da esso caderanno sulla concavità MAM', si anderan tutti a riunire in f, e reciprocamente.

Se dal contatto M si eleva sulla tangente MT la perpendicolare MI, che chiamasi *normale*, e la quale nello stesso tempo sarà anche perpendicolare alla curva, essa dividerà l'angolo FMf per metà, perchè se dagli angoli retti IMO, IMN, tolgansi gli uguali FMO, fMN, rimarrà $FMI = IMf$.

300. Da ciò può calcolarsi il valore di PI segmento dell'asse maggiore AB, intercetto

tra la normale MI della tangente MT, e l'ordinata MP pel contatto di questa. La retta PI chiamasi *sunnormale*.

Per calcolarla, si calcoli prima FI. E poichè nel triangolo FMf il suo angolo FMf è bisegato da MI, perciò (*Geom.* 104) si ha $fM : MF :: fI : IF$; dunque (*Geom.* 98) $fM + MF : fM - MF :: fI + IF : fI - IF$. Ma $fM + MF = a$, ed FM si è posta $= z$ (286), dunque $Mf = FM + Mf - FM = a - z$, ed $fM - MF = a - z - z = a - 2z$; di più $fI + IF = fF = AB - AF - fB = a - c - c = a - 2c$, ed essendo $fI = fF - FI = a - 2c - FI$, sarà $fI - FI = a - 2c - FI - IF = a - 2c - 2FI$. Onde nella proporzione $fM + MF : fM - MF :: fI + IF : fI - IF$, sostituendovi i rispettivi algebrici valori, si avrà $a : a - 2z :: a - 2c : a - 2c - 2FI$, e perciò $a^2 - 2ac - 2a \times FI = a^2 - 2ac - 2az + 4cz$, da cui risulta $FI = \frac{az - 2cz}{a}$, ove sostituendo per z il suo valore $\frac{ax + ac - 2cx}{a}$ rinvenuto (286), si ottiene $FI = \frac{a - 2c}{a} \times z = \frac{a - 2c}{a} \times \frac{ax + ac - 2cx}{a} = \frac{a^2x + a^2c - 4acx - 2ac^2 + 4c^2x}{a^2}$.

Ora $FI = FP + PI = AP - AF + PI$

$= x - c + PI$; dunque $PI = FI - x + c = \frac{a^2x + a^2c - 4acx - 2ac^2 + 4c^2x}{a^2} - x + c$
$= \frac{a^2x + a^2c - 4acx - 2ac^2 + 4c^2x + a^2 \times (-x + c)}{a^2} =$
$\frac{2a^2c - 2ac^2 - 4acx + 4c^2x}{a^2} = \frac{2a.(ac - c^2) + 4x(-ac + c^2)}{a^2}$
$= \frac{2a.(ac - c^2) - 4x(ac - c^2)}{a^2} = \frac{(2a - 4x).(ac - c^2)}{a^2} =$
$\frac{2a - 4x}{a^2} \times (ac - c^2)$, o pur sostituendovi per $ac - c^2$ il suo valore $\frac{b^2}{4}$ (294); finalmente si ha $PI = \frac{b^2}{4} \times \frac{2a - 4x}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{2a - 4x}{4} = \frac{b^2}{a^2} \times \left(\frac{1}{2}a - x\right)$.

301. Da ciò facilmente si determina la porzione PT dell' asse prolungato, intercetta fra la tangente MT, e l' ordinata MP pel contatto di questa, qual retta chiamasi *sottangente*. Poichè essendo nel triangolo IMT rettangolo in M, dal vertice M dell' angolo retto, abbassata sull' ipotenusa TI la perpendicolare MP, sarà (*Geom.* 112) $PI : PM :: PM : PT$, o sia $\frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{2}a - x\right) : y :: y : PT$; dunque $PT = \frac{a^2 y^2}{b^2 \left(\frac{1}{2}a - x\right)}$, o pure col so-

stituire in vece di y^2, il suo valore $\frac{b^2}{a^2}(ax-x^2)$, sarà $PT = \frac{a^2 b^2 (ax - x^2)}{a^2 b^2 \left(\frac{1}{2} a - x\right)} = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$.

Le algebriche espressioni di PI, e di PT posson servire a condurre la perpendicolare, e la tangente ad una data ellisse, in qualunque punto M di essa. Poichè quando il punto M è dato, abbassando da questo su di AB la perpendicolare MP, essa è data, ed è data anche AP, onde si rende noto il suo valore x. Ma per esser data l' ellisse, son noti pure i valori di a, e di b; dunque è cognito tutto ciò che costituisce i valori di PI, e di PT.

302. Dall' espressione di PT può conchiudersi, che se al cerchio descritto coll' asse maggiore AB per diametro (*fig.* 37), dal punto N in cui esso è incontrato dall' ordinata MP all' ellisse, tirisi la tangente NT; questa, e l' altra MT condotta all' ellisse, concorreranno nello stesso punto T dell' asse AB prolungato. Ciò accade, perchè non entrando l' asse minore b nell' espressione di PT, questa sarà sempre la stessa, fin tanto che a, ed x saranno le stesse. Così tutte le tangenti condotte alle ellissi, che hanno un comune asse maggiore, e quali si vogliono assi minori, dagli estremi delle ordinate corrispondenti ad una comune ascissa di esse, concorreran tutte in uno stesso punto del comun asse prolungato.

Se a PT (*fig.* 36) aggiungesi CP, ch' è $\frac{1}{2}a - x$, sarà $CT = CP + PT = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$

$+\frac{1}{2}a-x=\frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}a-x}$, col ridurre l' intero e fratto, a fratto, o sia $CT=\frac{AC^2}{CP}$, col sostituire i valori geometrici, in vece degli algebrici; da cui ottiensi questa proporzione $CP : CA :: CA : CT$. Cioè *l' ascissa dal centro, sta al semiasse maggiore, come questo, a se medesimo prodotto sino alla tangente*.

303. Se vuole ottenersi l' espressione di TM, ciò sarà facile per mezzo del triangolo rettangolo TPM, dal quale si ha $TM^2 = TP^2 + PM^2 = \frac{(ax-x^2)^2}{\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2} + \frac{b^2}{a^2}.(ax-x^2) = \left[ax-x^2+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2\right]\times\frac{ax-x^2}{\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2}$.

304. Se da qualunque punto M della ellisse, menasi sull' asse minore DD' la perpendicolare MP', e pongonsi $DP'=x'$, ed $MP'=y'$; sarà $DP'=CD-CP'=CD-PM=$, cioè $x'=\frac{1}{2}b-y$, e quindi $y=\frac{1}{2}b-x'$. Similmente si otterrà $MP'=CP=$

$CA - AP$, cioè $y' = \frac{1}{2} a - x$, onde $x = \frac{1}{2} a - y'$. Se questi valori di x, e di y sostituiscansi nell' equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (ax - x^2)$, o sia $a^2 y^2 = b^2 (ax - x^2)$, si avrà $\frac{1}{4} a^2 b^2 - a^2 b x' + a^2 x'^2 = \frac{1}{2} a^2 b^2 - a b^2 y' - \frac{1}{4} a^2 b^2 + a b^2 y' - b^2 y'^2$, che riducesi a $b^2 y'^2 = a^2 b x' - a^2 x'^2$, dà cui si ha $y'^2 = \frac{a^2}{b^2} \times (bx' - x'^2)$; equazione simile a quella ottenuta per l' asse maggiore, e da cui si conchiuderanno per conseguenza simili verità. Cioè che *il quadrato di un' ordinata* MP' *all' asse minore, sta al rettangolo* DP' × P'D' *delle corrispondenti ascisse prese da entrambi i vertici, come il quadrato dell' asse maggiore, sta a quello del minore*; ed anche che *i quadrati delle ordinate all' asse minore son come i rispettivi rettangoli delle corrispondenti ascisse prese da entrambi i vertici*; e che *l' ellisse può descriversi con assegnazion di punti, per mezzo del cerchio che ha il suo asse minore per diametro, prolungando le ordinate di tal cerchio in modo, che esse sieno a se medesime prolun-*

gate, *nella costante ragione dell' asse minore al maggiore*. Veggasi (*fig.* 37).

305. Da ciò può facilmente vedersi, che la curvatura dell' esterna superficie degli alberi delle navi, è quella di una porzione di ellittoide, cioè di un solido generato da una semiellisse *DRO* (*fig.* 39), che con perfetto rivolgimento si aggira intorno del suo asse maggiore.

In fatti, per determinare i diametri medj tral massimo e 'l minimo di essi, si tiri una retta *CD* per rappresentare il massimo diametro; e con essa per raggio, e con i suoi estremi *C* e *D* per centri descrivendo i due archi *DA* ed *AC*, che si taglino in *A*, da questo su di *CD* si abbassi la perpendicolare *AB*; e menando *EF* parallela a *CD*, ed uguale al minor diametro dell' albero, si riguardi l' intercetta *BL* come rappresentante l' altezza di quello, dopo del primo punto, in cui trovasi il maggior diametro, fino alla testa di moro. Si divida *BL* in un certo numero di parti uguali, e menando per i punti delle divisioni, le parallele come *IgN*, alla retta *CD*, prendansi queste per i diametri medj, che aver deve l' albero alle altezze rappresentate dalla corrispondente retta *Bg*; or

se supponesi, che BM sia la reale altezza, che è stata rappresentata con BL, e prendesi BT tale, che stia $BT : BM :: Bg : BL$, allora BT sarà l'altezza in cui deve situarsi il semidiametro gN; dunque menando TR parallela ed uguale a gN, R sarà un punto della superficie dell' albero; ma se per i punti R ed N si conduca RN che incontri BD in V, tal retta sarà parallela a BM, e poichè $BT : BM :: Bg : BL$, o sia $BT : Bg :: BM : BL$, si avrà $RV : VN :: BM : BL$, per essere $BT = RV$, e $Bg = VN$, cioè che le ordinate RV della curva dell' albero, sono alle ordinate VN del cerchio AND, sempre in una stessa ragione, dunque tal curva è una ellisse. Se si vorrà descriverla con movimento continuo, bisognerà determinarne gli assi, lo che è facile col menare CO parallela a BM, ed in modo, che stia $CO : CD :: MB : BL$; CO e CD saranno i due semiassi coi quali facilmente si determineranno i fuochi, ed indi si descriverà la curva con alcuno dei metodi, che sonosi esibiti (287, 288, e 289). Ma tutto ciò suppone, che sappiasi determinare il punto L tale, che menando a CD la parallela ELF, sia questa uguale al minimo diamatro dell' albero; ma ciò si eseguirà fa-

cilmente nel seguente modo, cioè si prolungherà DC in H in maniera, che CH pareggerà la metà del minimo diametro: col centro H, e col raggio uguale a CD si descriverà un archetto, che taglierà AB nel chiesto punto L. Poichè se supponesi EF prodotta sino a che incontra CO in T, e che si tira il raggio CF, il triangolo rettangolo CTF darà $CT = \sqrt{(CF^2 - FT^2)} = \sqrt{(EH^2 - HB^2)} = BL$, perchè si prescrive di fare $HL = CD = CF$, ed HC uguale al valore di LF, ciò che rende $BH = TF$.

306. Da ciò che precede vedesi, che le proprietà relative all'asse secondario, son simili a quelle ritrovate relativamente all' asse primario, eccetto però quelle che dipendon dai fuochi. Se vogliónsi avere sull' asse secondario, le linee analoghe a quelle calcolate sul primario, cioè $P'I'$, $P'T'$, CT', ed MT' (*fig.*36), esse troveransi facilmente per mezzo delle corrispondenti ad esse già ottenute, e dei triangoli simili, ch' è facile di ravvisare nella figura. Se tali rette esprimonsi per mezzo delle ascisse DP' o sia x', le espressioni delle medesime troveransi tutte simili a quelle, che in x si sono avute per l' asse primario.

All' asse secondario anche si dà il parame-

tro; e come quello non ha fuochi, così il suo parametro sarà la terza proporzionale in ordine a se medesimo, ed all' asse primario.

307. Fin quì le ascisse sonosi computate dal vertice, ma se vogliansi dal centro C, allor ponendo $CP = z$, sarà AP, o sia $x = \frac{1}{2} a - z$; onde sostituendo tal valore di x nell' equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (ax - x^2)$ e nei valori di PI, PT, CT, e TM^2, si avrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)$; $PI = \frac{b^2 z}{a^2}$; $PT = \frac{\frac{1}{4} a^2 - z^2}{z}$; $CT = \frac{\frac{1}{4} a^2}{z}$; $TM^2 = \left(\frac{1}{4} a^2 - z^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2}\right) \times \frac{\frac{1}{4} a^2 - z^2}{z^2}$.

L' equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{4} a^2 - z^2\right)$, esibisce $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - z^2\right)}$, da cui vedesi, che ad uno stesso valore di CP, o sia z, corrispondono due ordinate PM e PM'. E come i valori di z cominciano da C, e finiscono in A, sembra a prima vista, che tale equazione offre la sola metà DAD' della el-

lisse; ma niuna cosa determina di dare a z piuttosto dei valori positivi, che dei negativi; per cui dando a z questi ultimi valori, si avranno le ordinate pm, che esibiscono l'altra metà; e come ponendo $-z$ in vece di $+z$ in $\pm \frac{b}{a} V\left(\frac{1}{4} a^2 - z^2\right)$, questa grandezza non cambiasi in alcun modo, così ne segue, che la metà DBD' è perfettamente uguale all' altra DAD'.

308. Se da un qualunque punto M della ellisse (*fig.* 38) si meni al suo centro C la retta MCM', che vada a terminare dall'altra parte della curva, di questa tal retta dicesi *diametro*. E se pel vertice M di questo conducasi alla curva la tangente MT, e dal centro C si meni l'altro diametro NN' parallelo alla tangente MT, questo si chiamerà *diametro conjugato* del primo. La retta mO condotta da un qualunque punto m dell' ellisse, parallelamente alla tangente MT, e che giunga fino al diametro MM' chiamasi *ordinata* di esso, ed MO dicesi *ascissa*. E finalmente dicesi *parametro* del diametro MM', la terza proporzionale in ordine ad esso, ed al suo conjugato NN'.

309. Ora si farà vedere, che le ordinate

mO di un qualunque diametro ellittico, hanno proprietà simili a quelle delle ordinate degli assi.

A tal uopo, dai punti m ed O si abbassino le perpendicolari mp, OQ sull' asse AB, ed allo stesso da m si meni la parallela mS. Pongansi $AB = a$, $PM = y$, $CP = z$, $Qp = g$, $CQ = k$; saranno $AP = \frac{1}{2}a - z$ $PB = \frac{1}{2}a + z$, $Ap = CA - Cp = CA - CQ - Qp = \frac{1}{2}a - k - g$, $pB = BC + Cp = BC + CQ + Qp = \frac{1}{2}a + k + g$.

Ciò posto, dai triangoli simili TPM, mSO si ha $TP : PM :: mS$, o sia $pQ : So$; cioè $\frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z} : y :: g : SO = \frac{gyz}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$. Dagli altri triangoli simili CMP, COQ risulta $CP : PM :: CQ : QO$, cioè $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$; dunque $pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gyz}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$. Ora appartenendo il punto m all' ellisse, deve stare (295) $pm^2 : PM^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$, cioè $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gyz}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}\right)^2 : y^2 ::$

$\left(\frac{1}{2}a-k-g\right)\times\left(\frac{1}{2}a+k+g\right):\left(\frac{1}{2}a-z\right)\times$
$\left(\frac{1}{2}a+z\right)$, o sia $\frac{k^2y^2}{z^2}-\frac{2gky^2z}{z\left(\frac{1}{4}a^2-z^2\right)}+$
$\frac{g^2y^2z^2}{\left(\frac{1}{4}a^2-z^2\right)^2}:y^2::\frac{1}{4}a^2-k^2-2kg-g^2:\frac{1}{4}a^2-$
z^2; o pure eseguendo i prodotti degli estremi, e dei medj, e considerando le grandezze, che nello stesso tempo son moltiplicate e divise per $\frac{1}{4}a^2-z^2$, e le altre, che lo saranno anche per z, si avrà $\frac{k^2y^2}{z^2}$
$\left(\frac{1}{4}a^2-z^2\right)-2gky^2+\frac{g^2y^2z^2}{\frac{1}{4}a^2-z^2}=\frac{1}{4}a^2y^2-$
$k^2y^2-2gky^2-g^2y^2$; o sia, sviluppando il termine $\frac{k^2y^2}{z^2}\left(\frac{1}{4}a^2-z^2\right)$, sopprimendo $-k^2y^2$, e $-2gky^2$, che allor si avranno dall'una parte, e dall'altra, e finalmente dividendo per y^2; si avrà $\frac{\frac{1}{4}a^2k^2}{z^2}+$
$\frac{g^2z^2}{\frac{1}{4}a^2-z^2}=\frac{1}{4}a^2-g^2$, equazione che è necessaria pel proposto oggetto; ma prima d'impiegarla, vi si faccia un'osservazione, di cui si ha bisogno.

Se il punto O che si è supposto qualunque, supponesi che sia il punto C, cioè che la retta mO passi

pel centro, in qual caso essa diviene CN; allora CQ, o sia k divien zero, e la retta Qp, o sia g, diviene CR. Or se nella rinvenuta equazione ponesi $k = 0$, dopo di aver tolto il denominatore, trasposto, ridotto, e diviso per $\frac{1}{4}a^2$, si avrà $g^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2$, cioè $CR^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2 = \left(\frac{1}{2}a - z\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a + z\right) = AP \times PB$.

Dopo di questa osservazione, tornisi al proposto oggetto, e pongansi $CM = \frac{1}{2}a'$, $CN = \frac{1}{2}b'$, $mO = y'$, $CO = z'$. Ciò premesso, per i triangoli simili CPM, CQO si ha $CM : CO :: CP : CQ$, o sia $\frac{1}{2}a' : z' :: z : k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$; e dagli altri triangoli simili CNR, mSO si ottiene $mO : mS :: CN : CR$, o sia $y' : g :: \frac{1}{2}b' : CR = \frac{\frac{1}{2}b'g}{y'}$, dunque $CR^2 = \frac{\frac{1}{4}g^2 b'^2}{y'^2}$; ma CR^2 è uguale pure ad $\frac{1}{4}a^2 - z^2$, per cui $\frac{\frac{1}{4}g^2 b'^2}{y'^2} = \frac{1}{4}a^2 - z^2$,

donde si ha $g^2 = \dfrac{y'^2\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)}{\frac{1}{4}b'^2}$. Riprendasi ora l' equazione $\dfrac{\frac{1}{4}a^2 k^2}{z^2} + \dfrac{g^2 z^2}{\frac{1}{4}a^2 - z^2} = \frac{1}{4}a^2 - g^2$, e vi si sostituiscano i poco anzi ottenuti valori di g^2 e k^2, e risulterà $\frac{1}{4}a^2 \times$

$$\frac{z^2 z'^2}{\frac{1}{4}a'^2 z^2} + \frac{y'^2 z^2\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)}{\frac{1}{4}b'^2\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{\frac{1}{4}a^2 y'^2}{\frac{1}{4}b'^2} + \frac{y'^2 z^2}{\frac{1}{4}b'^2},$$

o sia riducendo, e poi dividendo per $\frac{1}{4}a^2$, $\dfrac{z'^2}{\frac{1}{4}a'^2} = 1 - \dfrac{y'^2}{\frac{1}{4}b'^2}$; o pure togliendo i denominatori $\frac{1}{4}a'^2$ ed $\frac{1}{4}b'^2$, sarà $\frac{1}{4}b'^2 z'^2 = \frac{1}{16}a'^2 b'^2 - \frac{1}{4}a'^2 y'^2$; e finalmente $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\left(\frac{1}{4}a'^2 - z'^2\right)$, da cui ottiensi $y'^2 : \frac{1}{4}a'^2 - z'^2 :: b'^2 : a'^2$; cioè $mO^2 : MO \times OM' :: NN'^2 : MM'^2$. Così l' equazione rela-

tivamente a due qualunque diametri conjugati, è simile a quella rinvenuta riguardo ai due assi.

310. Se si fa $y'=0$, si trova $\frac{1}{4}a'^2-z'^2=0$, da cui si ha $z'=\pm\frac{1}{2}a'$; dunque la curva incontra la retta MM' in due punti opposti M ed M' lontani dal centro, ciascuno per la grandezza $\frac{1}{2}a'$, o sia CM, così tutti i diametri son bisegati nel centro.

311. L' equazione $y'^2=\frac{b'^2}{a'^2}\left(\frac{1}{4}a'^2-z'^2\right)$, nell' offrire $y'=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{\left(\frac{1}{4}a'^2-z'^2\right)}$ dimostra, che se si prolunga mO in modo, che $Om'=Om$, il punto m' apparterrà alla curva; dunque *ciascun diametro della ellisse bisega le parallele alla tangente nel suo vertice* M.

312. Da ciò può conchiudersi 1.° che la tangente nel vertice N del diametro NN', è parallela al diametro MM'. 2.° dall' essere $y'=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{\left(\frac{1}{4}a'^2-z'^2\right)}$, può dedursi, che le ordinate Om al diametro MM', son quelle del cerchio che avrà MM' per diame-

metro, ma diminuite o accresciute nel rapporto di a' a b', ed inclinate sotto di un angolo uguale a quello dei diametri conjugati. Se $a' = b'$, tali ordinate pareggiano precisamente quelle di questo stesso cerchio. Se finalmente vuol sapersi in qual luogo della ellisse possono i diametri conjugati essere uguali fra essi, deve cercarsi in qual luogo si ha $CP = CR$, o sia $CP^2 = CR^2$, cioè $z^2 = \frac{1}{4} a^2 - z^2$; or tale equazione esibisce $2z^2 = \frac{1}{4} a^2$, o sia $z^2 = \frac{1}{8} a^2$, o pure $z = \sqrt{\frac{1}{8} a^2} = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 . \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$, la quale si costruirà nel seguente modo: cioè descritto sull'asse maggiore AB come diametro (*fig.* 37) il semicerchio $ANEB$, tagliato in E dell'asse minore CD, si dividerà l'arco AE in due parti uguali in N'', ed ordinata $N''P$ che taglierà l'ellisse in M'' ed M'; saranno CM'' e CM' i due semidiametri conjugati uguali. Perchè se chiamisi z la CP, per essere rettangolo ed isoscele il triangolo CPN'', a cagione dell'angolo ACN'' di 45 gradi, si avrà $2z^2 = CN''^2 = \frac{1}{4} a^2$, per cui $z = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$.

313. Se dal centro C (*fig.* 38) si meni la

perpendicolare CF sulla tangente TM, per i triangoli simili TPM, TCF si avrà $TM : MP :: TC : CF$, per cui $CF = \frac{MP \times TC}{TM}$. Parimente per gli altri triangoli simili TPM, CNR si ha $MT : TP :: NC : CR$, dunque $NC = \frac{MT \times CR}{TP}$; onde sarà $NC \times CF = \frac{MP \times TC \times MT \times CR}{MT \times TP} = \frac{MP \times TC \times CR}{TP}$, o pure elevando a quadrato $NC^2 + CF^2 = \frac{MP^2 \times TC^2 \times CR^2}{TP^2}$; ma qui sopra si è veduto, che y^2, o sia $PM^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)$, $CT^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{z^2}$, $PT^2 = \frac{\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)^2}{z^2}$, e $CR^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2$ (309); dunque sostituendo tali grandezze, dopo eseguite le riduzioni, si avrà $NC^2 \times CF^2 = \frac{1}{16}a^2 b^2$, e quindi $NC \times CF = \frac{1}{4}ab$; or conducendo la tangente NT'', che incontra TM in I, $NC \times CF$ esprime la superficie del parallelogrammo $CMIN$, ed $\frac{1}{4}ab$, o sia $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ dinota quella del rettangolo contenuto dai semiassi conjugati; dun-

que *i parallelogrammi costituiti dalle tangenti condotte per i vertici di due qualunque diametri conjugati, pareggiano il rettangolo contenuto dai due assi, e perciò son tutti uguali tra essi.*

314. Per i stessi triangoli simili TPM e CRN, si ha $TP : PM :: CR : RN$, dunque $RN = \frac{CR \times PM}{TP}$, o sia $RN^2 = \frac{CR^2 \times PM^2}{TP^2}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)z^2}{\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)^2} = \frac{b^2 z^2}{a^2}; \text{ ma}$$

per i triangoli rettangoli CRN, e CPM si ha $CR^2 + RN^2 = CN^2$, e $CP^2 + PM^2 = CM^2$ dunque $CR^2 + RN^2 + CP^2 + PM^2 = NC^2 + CM^2$; sostituendo nel primo membro i valori algebrici, in vece dei geometrici, dopo fatte tutte le riduzioni, si avrà $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 = NC^2 + CM^2$; dunque *la somma dei quadrati di due qualunque semidiametri conjugati della ellisse pareggia la somma dei quadrati dei due semiassi conjugati.*

315. Se nell'equazione $CN^2 = CR^2 + RN^2$, in vece di CR ed RN sostituiscansi i rispettivi algebrici valori di essi, si avrà $CN^2 =$

$\frac{1}{4}a^2 - z^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2}$; ma qui sopra si è trovato

$TM^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 - z^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2}\right) \times \frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z^2}$; dunque $TM^2 = CN^2 \times \frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z^2}$; ora per i triangoli simili TPM, $MP'T'$, quadrando, si ha $PT^2 : TM^2 :: P'M^2 : MT'^2$, o sia $\frac{\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)^2}{z^2}$: $CN^2 \times \frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z^2} :: z^2 : MT'^2$, dunque $MT'^2 = \frac{CN^2 \times z^2}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$; sicchè $TM^2 \times MT'^2 = CN^4$, o sia $TM \times MT' = CN^2$; ma se chiamasi p' il parametro del diametro MM', si avrà $2CM : 2CN :: 2CN : p'$ (308), per cui $2p' \times CM = 4CN^2$, o sia $CN^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$, e quindi anche $TM \times MT' = \frac{1}{2}p' \times CM$, onde si ha $CM : MT :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

Ora se su di TT' come diametro (*fig.* 40), si descrive un semicerchio, esso passerà pel punto C, per esser retto l'angolo TCT';

dunque se prolungasi CM finchè incontra in V la circonferenza, per la natura del cerchio (*Geom.* 124), si avrà $CM : MT :: T'M : MV$, per cui $MV = \frac{1}{2} p'$.

316. Da ciò può dedursi un metodo semplice per avere gli assi di una ellisse, e quindi per descriverla, quando sien dati di magnitudine due qualunque suoi diametri conjugati, e l'angolo da essi compreso.

Poichè si prolungherà CM per la grandezza MV uguale al suo semiparametro, e dal punto medio X di CV si eleverà su di essa la perpendicolare XZ, che incontrerà in Z la retta indefinita TT', condotta da M parallelamente ad NN'; indi col centro Z e col raggio ZC si descriverà il cerchio, che incontrerà TT' nei due punti T e T', per i quali, e per C tirando le TC e CT', saranno questi gli assi in posizione. Si determinerà poi la magnitudine di essi, abbassandovi le rispettive perpendicolari MP ed MP', ed indi prendendo CA media proporzionale tra TC e CP, e CD media proporzionale tra $T'C$ e CP'; perchè si è qui sopra veduto (302), che $CP : CA :: CA : CT$; è facile poi dimostrare, per mezzo dei triangoli simili TPM e TCT', e dei cogniti valori di TP, PM, e CT, che $CT' = \frac{CD^2}{CP'}$, cioè che $CP' : CD :: CD : CT'$.

317. Nel terminare ciò che riguarda l'ellisse si osservi, che essa impiegasi sovente nell'architettura navale. Sen servono per determinare i diametri medj dei *pennoni*; come appunto di sopra si è veduto, che se ne servivano per determinare quelli degli *alberi*.

Impiegasi ancora per determinare le projezioni delle forme, ec. In tutti questi casi, per descrivere l'ellisse, si parte dalla proprietà che essa ha, che le sue ordinate son proporzionali alle ordinate del cerchio che ha per diametro uno dei suoi assi. Su di questo principio è fondata pure la seguente regola, che si espone per descrivere la *quaderna maestra* di una nave, cui voglia darsi molta capacità.

Supponendo (*fig.* 41) che AE è uguale alla linea dell' *altezza di puntuale*; EM perpendicolare ad AE semilarghezza del vascello; MF il *semispianato* del *madiere*, $FB = EI$ il *pian posato del madiere*; si descriverà separatamente un quadrato $opqr$, il cui lato op si fa uguale EF. Divisa op in un certo numero di parti uguali, ed AI in un pari numero di parti, dai punti delle divisioni si menano delle perpendicolari ad op ed AI; indi col centro r, e col raggio ro descritto l'arco di quadrante onq, la parte mn di ciascuna parallela a pq si porta in $m'n'$, sulla parallela ad IB, corrispondente a simile divisione; la curva $An'B$ che passa per tutti i punti n' determinati così, forma una parte della quaderna maestra, che indi si compie, per la inferior parte, menando dal punto B al punto C orlo della chiglia, la retta BC, cui dal suo punto medio l elevasi la perpendicolare lk, che taglia in k la Bk parallela ad AE; allora col centro k, e col raggio kB descrivesi l'arco BC, che è tangente in B della curva $An'B$, perchè il suo centro k è sulla perpendicolare in B alla curva. L'altra si costruisce similmente.

Ora facilmente si vede, che la curva di cui trattasi, è una ellisse, l'asse maggiore della quale è $BT = AI$;

e 'l semiasse minore è $AT = pq = EF$; in fatti se pel punto (*) n', e per l' altro n conducesi $n'n$; questa retta sarà parallela ad AE; e poichè m ed m' son due corrispondenti punti di divisione, si avrà $om : Am' :: op : AI$; cioè, supponendo che nn' incontra or in s, ed AT in u, $sn : un' :: or$, o sia $AT : TB$; dunque le ordinate un' della curva $An'B$, stanno alle altre Sn del quadrante circolare, sempre nel rapporto di $BT : AT$, per cui tal curva è una ellisse: di più facilmente si osserva, che BT ed AT sono i suoi semiassi. Or come l' ellisse incontra i suoi assi perpendicolarmente, così è chiaro, che per congiungere i punti B e C con un arco che tocca la curva in B bisogna', che il centro k di quest' arco stia sulla retta TB prolungata.

Della Iperbole.

318. Si consideri ora la curva (*fig.* 42), che relativamente a ciascun dei suoi punti M abbia questa proprietà, che la differenza $fM - MF$ delle due congiungenti di ciascun di tali punti, cogli altri due f ed F dati di sito, sia sempre uguale ad una retta a data di magnitudine.

Si va dunque in traccia, come si è fatto

(*) Qui per facilitar la dimostrazione supponesi, che il lato op si è situato sul prolungamento di AI.

nella ellisse, di una equazione, che esprime il rapporto giacente tra le perpendicolari MP condotte su di Ff da uno degli anzidetti punti M, e tra le distanze FP, o AP di esse, da qualunque punto dato F, o pure A, preso ad arbitrio su di Ff.

A tal uopo prendesi per origine delle ascisse il punto A, determinato col prendere su di Ff dal suo punto medio C, la $CA = \frac{1}{2}\, a$, ed indi si fa $CB = CA$. Ciò premesso, pongonsi $AP = x$, $PM = y$, $FM = z$, e la cognita $AF = c$; in tal caso saranno $AB = a$, $FP = FA - AP = c - x$ (*), $fP = fB + BA + AP = c + a + x$, ed essendo $fM - MF = a$, sarà $fM = a + MF = a + z$.

I triangoli rettangoli FPM, fPM offrono $FP^2 + PM^2 = FM^2$, ed $fP^2 + PM^2 = fM^2$; o pur sostituendo i valori analitici, $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$, e $c^2 + 2ac + a^2 + 2cx + 2ax + x^2 + y^2 = a^2 + 2az + z^2$. Onde togliendo la prima di queste due equazioni dalla seconda, e sopprimendo a^2 che

---

(*) Se il punto P, in riguardo ad A fosse al di là di F, allora FP sarebbe $= x - c$; ma ciò non porterebbe alcun divario nella finale equazione.

si troverà in ambi i membri, si avrà $4cx + 2ac + 2ax = 2az$, da cui si ha $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$, dunque sostituendo questo valore di z nella prima equazione, risulterà $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = \frac{4c^2x^2 + 4ac^2x + a^2c^2 + 4acx^2 + 2a^2cx + a^2x^2}{a^2}$,

e togliendo il denominatore, trasponendo, e riducendo, sarà $a^2y^2 = 4a^2cx + 4ac^2x + 4acx^2 + 4c^2x^2$, o sia $a^2y^2 = (4ac + 4c^2)(ax + x^2)$,

e finalmente $y^2 = \frac{4ac + 4c^2}{a^2}(ax + x^2)$.

319. Questa equazione può servire a descrivere la curva per assegnazione di punti, dando ad x successivi diversi valori.

La curva si può descrivere anche per assegnazione di punti, prendendo ad arbitrio su di fF una porzione Br maggiore di BF, e descrivendo col centro f ed intervallo Br un cerchio, che si farà tagliare in un punto M da un altro cerchio descritto col centro F, ed intervallo Ar.

Finalmente una tal curva si potrà descrivere con un movimento continuo nel seguente modo.

Si applicherà in uno dei due punti f, F, e sia f l'estremo f di una riga fQ indefinita, ma però maggiore di fA, qual riga sia girevole intorno di questo punto. Indi un filo flessibile FMQ, la cui differenza dalla riga fQ pareggi AB, si legherà con un suo estremo nell'altro F dei due punti f, F, e coll'altro estremo nell'altro estremo Q della riga. Allora si girerà la

riga fQ intorno di f, mentre uno stiletto M, che tenderà le due porzioni FM, MQ del filo, terrà sempre distesa lungo la riga la porzione MQ del filo; lo stiletto M descriverà la curva AM di cui trattasi, e che chiamasi *Iperbole*. In fatti, la riga fMQ diminuita del filo $FMQ = AB$, ma $fMQ - FMQ = fM - MF$, col sopprimere di comune MQ; dunque $fM - MF = AB$, cioè ad una retta data.

320. L'equazione $y^2 = \frac{4ac + 4c^2}{a^2}(ax + x^2)$, esibisce $y = \pm\sqrt{\left[\frac{4ac + 4c^2}{a^2}(ax + x^2)\right]}$, lo che fa vedere, che ad ogni ascissa AP, o sia x, corrispondon sempre due ordinate uguali PM, PM', che cadono una da una parte, e l'altra dall'altra del prolungamento di AB che chiamasi *asse primario*: in qual modo conchiudesi, che la curva ha un secondo ramo AM' perfettamente uguale al primo AM, e che entrambi sono infiniti, perchè è chiaro che come si aumenta x, così accresconsi anche i due valori $\pm\sqrt{\left[\frac{4ac+4c^2}{a^2}(ax + x^2)\right]}$.

321. Se in questi stessi valori si fa negativa la x, cioè se supponesi, che il punto P cade al di sopra di A, essi diverranno $\pm\sqrt{\left[\frac{4ac + 4c^2}{a^2}(x^2 - ax)\right]}$; ora essendo $x^2 - ax$, o sia $(x - a)x$ negativa,

finchè x è minore di a, la grandezza $\pm\sqrt{\left[\frac{4ac+4c^2}{a^2}(x^2-ax)\right]}$ sarà allora immaginaria, o sia non vi sarà alcun valore reale di y da A fino a B; ma se poi x supera a, allora x^2-ax ritorna ad esser positiva, per cui i valori di y diverran nuovamente reali: onde principia da B una nuova porzione mBm' di curva, che come la prima si estende all'infinito da ciascuna parte del prolungamento di AB, e che è perfettamente uguale alla prima; perchè se si prende $Bp = AP$ allora $x^2 - xa$, o sia $Ap \times pB = AP \times PB$; dunque anche $pm = PM$.

322. Se nell' equazione $y^2 = \frac{4ac+4c^2}{a^2} \times (ax+x^2)$, si fa $y = o$, si avrà $ax + x^2$, o sia $x.(a+x) = o$; da cui risulta $x = o$, ed $x + a = o$, o sia $x = -a$; dunque la curva incontra l' asse AB nei due punti A e B.

323. Se supponesi $AP = AF$, cioè $x = c$, per avere il valore dell'ordinata Fm'', che passa pel punto F (che chiamasi *fuoco*, al pari del punto f) si avrà $y = \pm\sqrt{\left[\frac{4ac+4c^2}{a^2}(ac+c^2)\right]}$ $= \pm\sqrt{\left[\frac{4(ac+c^2)^2}{a^2}\right]} = \pm\frac{2(ac+c^2)}{a}$; dun-

que la doppia ordinata $m''m''' = \frac{4(ac+c^2)}{a}$: or questa linea dicesi il *parametro* dell'iperbole; e se essa chiamasi p, si avrà $p = \frac{4(ac+c^2)}{a}$, onde $\frac{p}{a} = \frac{4(ac+c^2)}{a^2}$. Dunque sostituendo ciò nell'equazione della curva, essa si muterà in quest'altra più semplice,

$$y^2 = \frac{p}{a}(ax + x^2).$$

Dal valore di p può conchiudersi, che *il parametro dell'asse primario dell'iperbole, è maggiore della quadrupla distanza di un vertice dal fuoco prossimo*; perchè questo valore $p = \frac{4ac+4c^2}{a}$, riducesi a $p = 4c + \frac{4c^2}{a}$ che evidentemente è maggiore di $4c$.

324. Se su di AB dal suo punto medio C si eleva la perpendicolare DD', la cui metà CD sia media proporzionale tra c ed $a+c$, cioè tra FA ed Af, tal perpendicolare dicesi *asse secondario* dell'iperbole; il quale se chiamasi b, si avrà $\frac{b^2}{4} = c.(a+c)$, o sia $b^2 = 4ac + 4c^2$; ed introducendo questo valor di b^2 nell'equazione $y^2 = \frac{4ac+4c^2}{a^2}(ax+x^2)$, essa si cambierà in $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$. Ve-

desi dunque, che queste tre equazioni dell'iperbole non differiscono dalle tre corrispondenti equazioni della ellisse, che pel segno del quadrato c^2, e del quadrato x^2.

Questa stessa equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$, somministra pure una proprietà analoga a quella stabilita nell'ellisse: in fatti, togliendo il denominatore a^2, si avrà $a^2 y^2 = b^2 (ax + x^2)$, da cui si ha questa analogia, $y^2 : ax + x^2 :: b^2 : a^2$, o sia $PM^2 : AP \times PB :: DD'^2 : AB^2 :: CD^2 : CA^2$; dunque *il quadrato di un'ordinata all'asse primario dell'iperbole, sta al rettangolo delle ascisse corrispondenti prese da entrambi i vertici, come il quadrato dell'asse secondario, sta a quello del primario*; e quindi *i quadrati delle ordinate son tra essi come i rettangoli delle corrispondenti ascisse prese da ambi i vertici.*

Quando i due assi a e b sono uguali, l'equazione diventa $y^2 = ax + x^2$, che non differisce da quella del cerchio, che pel segno del quadrato x^2. In tal caso l'iperbole dicesi *parilatera*, o sia *equilatera*.

Dall'equazione $p = \frac{4ac + 4c^2}{a^2}$, si ha $4ac +$

$4c^2 = ap$, ma pure $4ac + 4c^2 = b^2$, dunque $ap = b^2$, da cui si ha $a : b :: b : p$; dunque il parametro dell' asse primario è terzo proporzionale in ordine a quest' asse, ed al secondario.

325. Se dal punto D al punto A si tira la retta DA, il triangolo rettangolo DCA darà $DA = \sqrt{(CD^2 + CA^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{4} a^2\right)}$, in cui sostituendo per b^2 il suo valore $4ac + 4c^2$, si avrà $DA = \sqrt{(c^2 + ac + \frac{1}{4} a^2)}$ $= c + \frac{1}{2} a = FA + AC = CF$; dunque per avere i fuochi quando son dati gli assi, bisogna tagliare $CF = DA$; ed al contrario, per aver l' asse secondario quando è dato il primario, ed i fuochi, bisogna col centro A, ed intervallo CF descrivere un cerchio, che taglierà la perpendicolare DD' in qualunque punto D.

326. Vedesi dunque, che la descrizione dell' iperbole dipende da due quantità, cioè o dai due assi, o dall' asse primario ed i fuochi, o dall' asse primario e 'l suo parametro. Da ciò che si è detto, si ridurrà sempre facilmente la descrizione dell' iperbole, ad un dei metodi di già esposti. Poichè se

si dasse l' asse primario e 'l parametro, allor prendendo la media proporzionale tra queste due rette, si avrebbe l' asse secondario per mezzo del quale si troverebbero i fuochi.

327. Se su di Mf prendesi la parte $MG = MF$, e congiunta FG, ad essa si mena da M la perpendicolare MOT, questa sarà tangente dell' iperbole, cioè incontrerà la curva nel solo punto M.

In fatti, se ciò non è, se è possibile MOT incontri nuovamente la curva in N, e si tirino le Nf, NG, NF; per l' adoprata costruzione sarà $NG = NF$; onde $Nf - NG = Nf - NF = Mf - MF = Mf - MG = Gf$, sicchè $Nf = NG + Gf$, cioè un lato di un triangolo uguale agli altri due presi insieme; lo che essendo impossibile, è impossibile che MOT incontra nuovamente la curva in N, e quindi gli è tangente in M.

In seguito della precedente costruzione, gli angoli FMO, OMG sono uguali, ma OMG pareggia il suo verticale NMQ, dunque FMQ è uguale a QMN; sicchè la retta MF che va ad un fuoco, ed MQ prolungamento di Mf che va all' altro fuoco, comprendono angoli uguali colla tangente in M. Quindi se F è un punto luminoso, tutt' i raggi che

da esso caderanno sulla concavità MAM' si rifletteranno dirigendosi, come se procedessero dall' altro fuoco f.

328. Si determini ora la sottangente PT.

Poichè l' angolo FMf è bisegato dalla tangente MT, si avrà (*Geom.* 104) $fM : MF :: fT : TF$, or ponendo come quì sopra, $MF = z$, sarà $fM = z + a$; e di più essendo $Ff = FA + AB + Bf = a + 2c$, sarà $fT = fF - FT = a + 2c - FT$; dunque si avrà $z + a : z :: a + 2c - FT : FT$; dunque pareggiando i prodotti degli estremi, e dei medj, sarà $z \times FT + a \times FT = az + 2cz - z \times FT$; dà cui dopo delle solite operazioni, si ha $FT = \frac{2cz + az}{2z + a} = \frac{(2c + a)z}{2z + a}$; or si è trovato (318) $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$, dunque

$$2z + a = \frac{4cx + 2ac + 2ax + a^2}{a} = \frac{(2c + a)2x + (2c + a)a}{a} = \frac{(2c + a)(2x + a)}{a};$$

sostituendo questi valori in quello di FT, si avrà $FT = \frac{(2c + a) \times \frac{2cx + ac + ax}{a}}{(2c + a) \times \frac{2x + a}{a}}$, o pur sopprimendo il comun fattore $\frac{2c + a}{a}$, sarà

$FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}$. Essendosi così determinata FT, è facile di aver la sottangente PT; perchè $PT = TF - FP = FT - (FA - AP) = FT - FA + AP = FT - c + x =$
$\frac{2cx + ac + ax}{2x + a} - c + x = \frac{2ax + 2x^2}{2x + a} =$
$\frac{ax + x^2}{x + \frac{1}{2} a}$; e da ciò si vede, che l'espressione della sottangente per l'iperbole, differisce nei soli segni da quella, che si è ottenuta per l'ellisse.

329. Se da PT togliesi AP, si avrà la distanza AT dal vertice, fin dove la tangente incontra l'asse. Tal distanza dunque sarà espressa da $\frac{ax + x^2}{x + \frac{1}{2} a} - x$ cioè da $\frac{\frac{1}{2} ax}{\frac{1}{2} a + x}$.

330. Questa espressione di AT offre l'opportunità di fare qualche osservazione sulla curvatura della iperbole. Si è di sopra veduto, che ciascuno dei rami AM, AM' si estende all'infinito; intanto la curvatura di essi è tale, che tutte le tangenti che menar si possono da qualunque punto dei medesimi, debbono incontrar l'asse tral centro

C, e 'l vertice A. In fatti, se nel valore di AT in vece di x sostituiscesi qualunque quantità che sia maggiore di zero, ed anche infinita, il valor di AT sarà sempre maggiore di zero, ma non maggiore di $\frac{1}{2}a$; perchè quando x è infinita, il denominatore $\frac{1}{2}a+x$ equivale alla sola x, per non potere l' infinita quantità x essere aumentata o diminuita dalla finita $\frac{1}{2}a$, che ad essa si aggiunga, o pur da essa si tolga; ed in tal caso AT riducesi ad $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$, cioè ad $\frac{1}{2}a$; dunque le tangenti negli estremi infiniti dei rami AM, ed AM', passano pel centro C. E poichè i rami opposti Bm, e Bm' son perfettamente uguali a quelli, e di più i punti A e B sono equidistanti da C; perciò ne segue, che tali tangenti sono tangenti anche negli estremi infiniti dei rami Bm, e Bm'. Veggonsi esse rappresentate (*fig.* 43) dalle rette CX, CY.

331. Queste tangenti chiamansi gli *asintoti* della iperbole: esse, come vedesi, sono rette che partendo dal centro di tal curva, a questa sempre si accostano, senza poterla incontrare, che ad una distanza infinita.

Se pel vertice A (*fig.* 42), menasi la retta At parallela a PM, i triangoli simili TAt, TPM offrono $TP : PM :: TA : At$; cioè

$$\frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} : y :: \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} : At = \frac{\frac{1}{2}axy}{\frac{1}{2}a + x} \times \frac{\frac{1}{2}a + x}{ax + x^2} = \frac{\frac{1}{2}ay}{a + x},$$

o pur sostituendo per y il suo valore $\frac{b}{a}\sqrt{(ax + x^2)}$, $At = \frac{\frac{1}{2}b\sqrt{(ax + x^2)}}{a + x}$, qual valore di At diviene $\frac{1}{2}b$, o sia CD quando x è infinita, perchè ax deve trascurarsi relativamente ad x^2, ed a relativamente ad x. Ecco dunque in qual modo si determineranno gli asintoti. Dal punto A (*fig.* 43) si eleverà ad AB la perpendicolare LL', nella quale dall' una e dall' altra parte di A si prenderanno le AL, AL' ciascuna uguale a CD; allora conducendo dal centro C ai punti L ed L' due rette, queste saranno gli asintoti.

332. Per aver l' espressione di CT (*fig.* 42), bisogna da CA togliere AT, e si avrà $CT = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{CA^2}{CP}$, da cui si ha questa proporzione $CP : CA :: CA : CT$.

11

233. Se si vuole l'espressione di TM, nel triangolo rettangolo TPM si avrà $TM^2 = PM^2 + PT^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2) + \frac{(ax+x^2)^2}{(\frac{1}{2}a+x)^2}$

$$= \left[\frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{2}a+x)^2 + ax + x^2\right] \times \frac{ax+x^2}{(\frac{1}{2}a+x)^2}.$$

334. L' espressione della sunnormale PI rilevasi dai triangoli simili TPM, MPI, dai quali si ha $TP : PM :: PM : PI$, o sia

$$\frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x} : y :: y : PI = \frac{y^2(\frac{1}{2}a+x)}{ax+x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$\times(\frac{1}{2}a+x)$, per essere $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax+x^2)$.

335. Ora si stabilisca l'equazione in riguardo all' asse secondario DD'; a qual uopo su di esso si meni la perpendicolare MP', che pongasi $= y'$, e DP' si chiami x', saran $PM = CP' = CD - DP'$, o sia $y = \frac{1}{2}b - x'$, e $PA = PC - CA = MP' - CA$, o pure $x = y' - \frac{1}{2}a$; sostituendo per x ed y questi valori nell' equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax+x^2)$, o sia $a^2y^2 = b^2(ax+x^2)$,

dopo eseguite le riduzioni, si avrà $y'^2 = \frac{a^2}{b^2} \times (\frac{1}{2} b^2 - b x' + x'^2)$; e da ciò vedesi, che nella iperbole l'equazione riguardante l'asse secondario non è, come nell'ellisse, simile a quella relativa al primario.

336. Se vuolsi finalmente l'equazione relativa ad AB, prendendo le ascisse dal centro C; si porrà $CP = z$, onde essendo $PA = PC - CA$, sarà $x = z - \frac{1}{2} a$; e sostituendo per x questo valore nell'equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$, si avrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(z^2 - \frac{1}{4} a^2)$, per la chiesta equazione.

E per rapporto all'asse secondario DD', se ponesi $CP' = z'$, essendo $DP' = DC - CP'$ sarà $x' = \frac{1}{2} b - z'$; qual valore di x' sostituito nell'equazione $y'^2 = \frac{a^2}{b^2}(\frac{1}{2} b^2 - bx' + x'^2)$ rinvenuta (335) per tal asse, si avrà $y'^2 = \frac{a^2}{b^2}(z'^2 + \frac{1}{4} b^2)$.

337. Se le espressioni di PT, TC, PI, e TM determinate di sopra, voglionsi calcolare coll'ascissa dal centro, devesi in esse soltanto sostituire $z - \frac{1}{2} a$ in vece di x, e tro-

veransi $PT = \frac{z^2 - \frac{1}{4}a^2}{z}$, $CT = \frac{\frac{1}{4}a^2}{z}$, $PI = \frac{b^2 z}{a^2}$, $TM = (\frac{b^2 z^2}{a^2} + z^2 - \frac{1}{4}a^2) \times \frac{z^2 - \frac{1}{4}a^2}{z^2}$

E se prolungasi MT fin che incontra l'asse secondario in T', i triangoli simili TPM, TCT' daranno $TP : PM :: TC : CT'$, o sia $\frac{z^2 - \frac{1}{4}a^2}{z} : y :: \frac{\frac{1}{4}a^2}{z} : CT = \frac{\frac{1}{4}a^2 y}{z^2 - \frac{1}{4}a^2}$; ma

$z^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$; dunque $CT' = \frac{\frac{1}{4}b^2}{y} = \frac{CD^2}{PM} = \frac{CD^2}{CP'}$; onde $CP' : CD :: CD : CT'$.

338. Se pel centro C dell'iperbole (*fig.* 43) menasi una qualunque retta MCM' che termina in quella dall'una parte e dall'altra, essa chiamasi *diametro* di tal curva. Ogni retta mO condotta da qualunque punto m del perimetro della curva, parallelamente alla tangente a questa condotta dal vertice M di un suo diametro MM', e che incontra in O questo prolungato, dicesi *ordinata* del medesimo, ed MO, OM' le *ascisse* ad essa corrispondenti. Or si dimostrerà, che le proprietà di un

qualunque diametro relativamente alle sue ordinate, son le stesse di quelle dell' asse primario in rispetto alle sue ordinate.

Si menino dai punti m ed O sull' asse AB le perpendicolari mp, OQ, e da m conducasi mS parallela ad AP; pongansi $PM = y$, $CP = z$, $Qp = g$, $CQ = k$; saranno $AP = PC - CA = z - \frac{1}{2}a$, $BP = PC + CB = z + \frac{1}{2}a$; $Ap = pC - CA = CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a$, $Bp = pC + CB = k - g + \frac{1}{2}a$.

Ciò posto, i triangoli simili CPM, CQO offrono $CP : PM :: CQ : QO$, cioè $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$. I triangoli simili TPM, mSO esibiscono $TP : PM :: mS$, o sia $Qp : SO$, ovvero (337) $\frac{z^2 - \frac{1}{4}a^2}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{z^2 - \frac{1}{4}a^2}$; dunque $mp = SQ = QO - OS = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{z^2 - \frac{1}{4}a^2}$; or poichè m è un punto dell' iperbole, perciò (324) $pm^2 : PM^2 :: Ap$

$\times\ pB : AP \times PB$; cioè $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{z^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)^2 : y^2 :: (k - g - \frac{1}{2}a) \times (k - g + \frac{1}{2}a) : (z - \frac{1}{2}a) \times (z + \frac{1}{2}a)$, o sia $\frac{k^2y^2}{z^2} - \frac{gkzy^2}{\left(z^2 - \frac{1}{4}a^2\right)} + \frac{g^2z^2y^2}{\left(z^2 - \frac{1}{4}a^2\right)^2} : y^2 :: k^2 - 2kg + g^2 - \frac{1}{4}a^2 : z^2 - \frac{1}{4}a^2$; dunque moltiplicando gli estremi ed i medj, e riflettendo alle grandezze, che nello stesso tempo son moltiplicate e divise per $z^2 - \frac{1}{4}a^2$, ed alle altre che 'l saranno anche per z, si avrà $\frac{k^2y^2}{z^2} \times (z^2 - \frac{1}{4}a^2) - 2gky^2 + \frac{g^2z^2y^2}{z^2 - \frac{1}{4}a^2} = k^2y^2 - 2gky^2 + g^2y^2 - \frac{1}{4}a^2y^2$, ovvero sviluppando il termine $\frac{k^2y^2}{z^2}(z^2 - \frac{1}{4}a^2)$, sopprimendo k^2y^2, e $-2gky^2$, che troveransi in ambi i membri, e finalmente dividendo per y^2, si avrà $-\frac{1}{4}\frac{a^2k^2}{z^2} + \frac{g^2z^2}{z^2 - \frac{1}{4}a^2} = g^2 - \frac{1}{4}a^2$, equazione che conduce a dimostrare

la proposta proprietà ; ma pria si osserverà, che se dall' una parte e dall' altra del centro C prendesi sull' asse AB la parte CR media proporzionale tra BP e PA, cioè che $CR^2 = AP \times PB = z^2 - \frac{1}{4} a^2$, e su di AB da R si eleva la perpendicolare RN', terminata in N' dalla retta NN' condotta dal centro C parallelamente a TM, e prendesi $CN = CN'$; allora NN' dicesi *diametro conjugato* di MM'; e la terza proporzionale in ordine ad MM', ed NN' dicesi *parametro* di MM'.

Or si ritorni al proposto oggetto, ponendo $CM = \frac{1}{2} a'$, CN o $CN' = \frac{1}{2} b'$, $CO = z'$, ed $Om = y'$.

Ciò premesso, i triangoli simili CPM, CQO presentano $MC : CP :: CO : CQ$, cioè $\frac{1}{2} a' : z :: z' : k$, dunque $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2} a'}$, e $k^2 = \frac{z^2 z'^2}{\frac{1}{4} a'^2}$. Dagli altri triangoli simili mSO, $CN'R$ si ha $CN' : CR :: mO : mS$, o sia $\frac{1}{2} b' : CR :: y' : g$, dunque $g = \frac{CR \times y'}{\frac{1}{2} b'}$,

e $g^2 = \frac{CR^2 \times y'^2}{\frac{1}{4}\ b'^2}$; onde essendosi fatta poco anzi

$CR^2 = z^2 - \frac{1}{4} a^2$, sarà $g^2 = \frac{y'^2\left(z^2 - \frac{1}{4} a^2\right)}{\frac{1}{4}\ b'^2}$.

Or tali valori di g^2, e k^2 sostituiscansi nell' equazione $-\frac{\frac{1}{4} a^2 k^2}{z^2} + \frac{g^2\ z^2}{z^2 - \frac{1}{4} a^2} = g^2 - \frac{1}{4} a^2$ ottenuta di sopra, e si avrà $-\frac{1}{4} a^2 \times \frac{z^2\ z'^2}{\frac{1}{4} a'^2 z^2} + \frac{y'^2 z^2 \left(z^2 - \frac{1}{4} a^2\right)}{\frac{1}{4} b'^2 \left(z^2 - \frac{1}{4} a^2\right)} = \frac{y'^2\ z^2}{\frac{1}{4}\ b'^2} - \frac{\frac{1}{4} a^2\ y'^2}{\frac{1}{4}\ b'^2} - \frac{1}{4}\ a^2$, e riducendo, ed indi dividendo per $\frac{1}{4} a^2$, sarà $-\frac{z'^2}{\frac{1}{4}\ a'^2} = -\frac{y'^2}{\frac{1}{4}\ b'^2} - 1$, ed in seguito delle solite operazioni, risulterà $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\ (z'^2 - \frac{1}{4}\ a'^2)$, equazione simile a quella ottenuta per l' asse primario.

339. Se si fa $y' = 0$, trovasi $z'^2 - \frac{1}{4} a'^2$

$= 0$, che offre $z' = \pm \frac{1}{2} a'$; dunque la curva incontra MM' in due punti opposti M ed M' ciascuno lontano dal centro per $\frac{1}{2} a'$, o sia CM; in tal modo ogni diametro è bisegato nel centro.

340. L'equazione $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(z'^2 - \frac{1}{4} a'^2)$ presentando $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(z'^2 - \frac{1}{4} a'^2)}$, cioè per y' due valori uguali ma di contrario segno, dimostra, che se prolungasi mO facendo $Om' = Om$, il punto m' sarà nella curva; cioè che ciascun diametro MM' bisega tutte le corde della curva parallele alla tangente nel suo vertice M.

341. La stessa equazione offre $a'^2 y'^2 = b'^2 (z'^2 - \frac{1}{4} a'^2)$, da cui si ha $y'^2 : z'^2 - \frac{1}{4} a'^2 :: b'^2 : a'^2$, o sia $mO^2 : MO \times OM' :: NN'^2 : MM'^2$; cioè *il quadrato di un' ordinata a qualunque diametro dell' iperbole, sta al rettangolo delle corrispondenti ascisse prese da entrambi i vertici, come al quadrato di tal diametro, ne sta quello del suo conjugato.*

342. Se dal centro C si abbassa su di TM la perpendicolare CF, dai triangoli simili

CFT, TPM si avrà $TM : MP :: TC : CF = \frac{MP \times TC}{TM}$. Dagli altri triangoli simili CRN, TPM, si avrà $PT : TM :: RC : CN$, o sia $CN = \frac{TM \times RC}{PT}$; dunque $CF \times CN = \frac{MP \times TC \times TM \times RC}{TM \times PT} = \frac{MP \times TC \times RC}{PT}$, ed elevando a quadrato, $CF^2 \times CN^2 = \frac{PM^2 \times CT^2 \times CR^2}{PT^2}$; e poichè $PM^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(z^2 - \frac{1}{4}a^2\right)$, $CR^2 = z^2 - \frac{1}{4}a^2$ (338), e (337) $CT^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{z^2}$, $PT^2 = \frac{\left(z^2 - \frac{1}{4}a^2\right)^2}{z^2}$; perciò sostituendo, ed indi riducendo, si avrà $CF^2 \times CN^2 = \frac{1}{16}a^2 b^2$, onde $CF \times CN = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$. Or se si prolunga MT in I fino all' asintoto, MI sarà uguale a CN, come da quì a poco si dimostrerà, e $CIMN$ sarà un parallelogrammo, la cui superficie sarà $= CF \times MI = CF \times CN = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$. Onde qualunque sia il punto M, il parallelogrammo $CIMN$ pareggerà sempre il rettangolo dei semiassi.

243. Dai triangoli simili TPM, e CRN' si ha $TP : PM :: CR : RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, ed $RN'^2 = \frac{PM^2 \times CR^2}{TP^2} = \frac{b^2 z^2}{a^2}$: or nei triangoli rettangoli CPM, e CRN' si ha $CM^2 = CP^2 + PM^2$, e CN'^2, ossia $CN^2 = CR^2 + RN'^2$; dunque $CM^2 - CN^2 = CP^2 + PM^2 - (CR^2 + RN'^2) = CP^2 + PM^2 - CR^2 - RN'^2$; e sostituendo nel secondo membro i rispettivi algebrici valori, dopo eseguite le riduzioni, si avrà $CM^2 - CN^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} b^2 = \left(\frac{1}{2} a\right)^2 - \left(\frac{1}{2} b\right)^2$. Cioè, che *nella iperbole la differenza dei quadrati di due suoi qualunque semidiametri conjugati, pareggia costantemente la differenza dei quadrati dei due semiassi.*

Da ciò ne segue, che nell'iperbole parilatera ciascun diametro è uguale al suo conjugato; perchè se $a = b$, sarà $CM^2 - CN^2 = 0$, onde $CM = CN$.

344. Se in $CN^2 = CR^2 + RN'^2$ si sostituiscono gli algebrici valori di CR, ed RN', si avrà $CN^2 = z^2 - \frac{1}{4} a^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2}$; ma di sopra (337) si è rinvenuto $TM^2 = \left(\frac{b^2 z^2}{a^2} + \right.$

$z^2 - \frac{1}{4}a^2) \dfrac{z^2 - \frac{1}{4}a^2}{z^2}$, dunque sostituendo, sarà $TM^2 = \dfrac{z^2 - \frac{1}{4}a^2}{z^2} \times CN^2$; e dippiù per i triangoli simili MPT, ed $MP'T''$; quadrando si ha $PT^2 : TM^2 :: P'M^2 : T'M^2$, o sia $\dfrac{\left(z^2 - \frac{1}{4}a^2\right)^2}{z^2} : \dfrac{CN^2 \times \left(z^2 - \frac{1}{4}a^2\right)}{z^2} :: z^2 : T'M^2$; dunque $T'M^2 = \dfrac{CN^2 \times z^2}{z^2 - \frac{1}{4}a^2}$, $TM^2 \times T'M^2 = CN^4$, e $TM \times T'M = CN^2$. Ma se chiamasi p' il parametro del diametro MM', si avrà $2CM : 2CN :: 2CN : p'$, onde $2p' \times CM = 4\ CN^2$, e $CN^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; sicchè $TM \times T'M = \frac{1}{2}p' \times CM$, e quindi $CM : MT :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

345. Da ciò si può dedurre il metodo per aver gli assi della iperbole, e conseguentemente per descriverla, quando son dati due suoi diametri conjugati in posizione e magnitudine.

In fatti, si prenderà su di MC (*fig.* 44) la $MH = \frac{1}{2}p'$, e su di CH dal suo punto medio I si eleverà la perpendicolare IK, che in un certo punto K ta-

glierà la MT' condotta parallelamente al conjugato NN' dal punto M. Con tal punto K per centro, ed intervallo la distanza da K a C si descriverà un cerchio, che taglierà MT' nei due punti T e T' per i quali, e pel centro C condotte le TC e CT', queste saranno le direzioni degli assi, perchè è chiaro, 1. che l'angolo TCT' sarà retto per essere il suo vertice C nella circonferenza, e per passare i suoi lati TC e CT' per gli estremi del diametro TT'; 2. per la natura del cerchio, si ha (*Geom.* 127) $CM : MT :: MT' : MH$, o sia $CM : MT :: MT' : \frac{1}{2} p'$, per essersi fatta $MH = \frac{1}{2} p'$

Essendosi così determinate le posizioni degli assi, se ne determineran le magnitudini abbassando dal punto M le perpendicolari MP, MP' rispettivamente sulle CT, e CT', e prendendo CA media proporzionale tra CP e CT, e CD' media proporzionale tra CP' e CT'; quale operazione è una conseguenza delle espressioni rinvenute (337) per CT e CT'.

Quando poi son dati i due diametri conjugati uguali, in tal caso è uguale ad essi anche il parametro; dal che ne deriva $MH = MC$, i due punti H e C si confondono, ed MC diviene tangente del cerchio; così per avere il centro K, bisogna soltanto dal punto C elevar su di CM la perpendicolare.

Della Iperbole tra gli asintoti suoi (*).

346. L'iperbole riferita ai suoi asintoti ha delle proprietà, che or vannosi ad esporre, la cui conoscenza può essere utile. Qui bisogna rammentarsi come si determinano gli asintoti; veggasi (331).

Ciascun punto E dell'iperbole (*fig.* 45) si rapporta ai due suoi asintoti CLO, $CL'o$, conducendo da esso la EQ parallela ad uno di questi; e rintracciando la relazion giacente tra le EQ e QC.

Per determinar questa, si condurrà per qualunque punto E della curva la OEo parallela all'asse secondario DD', e l'altra ES parallela all'asintoto CLO; e dal vertice A si menerà AG parallela a $CL'o$. Indi si porranno $CA = \frac{1}{2}a$; CD, o AL, o $AL' = \frac{1}{2}b$; $CP = z$; $PE = y$; $AG = m$; $GL = n$; $CQ = t$; $QE = u$.

(*) Il Traduttore. *In questo articolo, per usare una maggior chiarezza a pro degli Aspiranti di Marina, sonosi mutate varie dimostrazioni. Simili dilucidazioni, ma non in modo così sensibile come nel presente articolo, incontransi sovente sparse nel decorso dell'attual Traduzione. Un semplice confronto coll' Originale potrà mostrare agevolmente sì queste, che le diverse restituite tipografiche sviste.*

Dai triangoli simili CPO, CAL si ha CA : AL :: CP : PO, o sia $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$, o pure $a : b :: z : PO$, o sia $PO = \frac{bz}{a}$; dunque $EO = \frac{bz}{a} - y$, ed $Eo = \frac{bz}{a} + y$; quindi $EO \times Eo = \frac{b^2}{z^2} - y^2 = \frac{1}{4}b^2$, col sostituire per y^2 il suo valore $\frac{b^2}{a^2} \times \left(z^2 - \frac{1}{4}a^2\right)$, e col ridurre; cioè $EO \times Eo = CD^2 = AL^2$, proprietà appartenente a ciascun punto della curva, perchè E ne è stato un qualunque di essa.

347. Per i triangoli simili QEO, ESo, ed AGL si ha $AL : AG :: EO : EQ$, ed $AL : LG :: Eo : ES$; dunque moltiplicando in corrispondenza queste due analogie, affin di introdurvi $EO \times Eo$, di cui si ha il valore, si otterrà $\frac{1}{4}b^2 : mn :: \frac{1}{4}b^2 : ut$; onde $ut = mn$, equazione all' iperbole tra gli asintoti. Così in qualunque punto E di tal curva sempre si ha $EQ \times ES$, o sia $EQ \times CQ = AG \times GL$.

Ora per la determinazion degli asintoti (331) $AL = AL'$; e poichè nel triangolo CLL' vi è AG parallela a CL', perciò $LG : GC :: LA : AL'$, dunque essendo $LA = AL'$, del

pari sarà $LG = GC$; quindi il cerchio del diametro LC avrà G per centro, e l'angolo retto CAL i cui lati passano per gli estremi del suo diametro CL, avrà il vertice A alla periferia di tal cerchio; onde GA ne sarà un raggio, e si avrà $CG = GA = GL$, cioè $CG = m = n$, per cui essendo $ut = mn$, sarà $ut = m^2 = CG^2$.

Questo costante quadrato m^2, o CG^2, cui è sempre uguale ut, ovvero il rettangolo di CQ in QE, dicesi la *potenza* dell'iperbole.

348. Dalla or dimostrata proprietà può dedursene quest'altra: *Se da qualunque punto* E *dell'iperbole tirasi comunque la retta* REr, *che termina agli asintoti da ambe le parti; i segmenti* RE, mr *di questa intercetti tra la curva e gli asintoti, saranno uguali.*

In fatti, pel punto m menisi hmH parallela ad OEo, sarà il triangolo REO simile all'altro RmH, dunque si avrà $ER : Rm :: EO : mH$, e sarà pure il triangolo rhm simile all'altro roE, onde si otterrà $Er : rm :: Eo : mh$; quindi moltiplicando in corrispondenza tali analogie, ne risulterà $RE \times Er : Rm \times mr :: OE \times Eo : Hm \times mh$; ma i due rettangoli $OE \times Eo$, ed $Hm \times mh$ sono uguali ciascuno a CD^2 (346); dunque RE

$\times Er = Rm \times mr$, o sia $RE \times (Em + mr) = (RE + Em) \times mr$, cioè $RE \times Em + RE \times mr = RE \times mr + Em \times mr$; e sopprimendo di comune $RE \times mr$, si avrà $RE \times Em = Em \times mr$; e quindi $RE = mr$.

349. Sia Tt tangente dell' iperbole in qualunque suo punto M, e termini agli asintoti di questa da ambe le parti, sarà Tt bisegata nel contatto M. In fatti, per M. conducasi il diametro CM, cui da qualunque punto E della curva si ordini la Em, che si prolunghi fino agli asintoti in R ed r; sarà $VE = Vm$ (340); e sarà $ER = mr$ (348), onde $VE + ER = Vm + mr$, cioè $VR = Vr$; ma $VR : MT :: Vr : Mt$, per essere ciascuna delle ragioni di tale analogia uguale a quella di $VC : CM$; dunque essendo $VR = Vr$, sarà $MT = Mt$.

350. Se pel punto M menasi IMi parallela a DD', e per l' altro E conducesi REr parallela a Tt tangente in M, per i triangoli simili TMI, ed REO si avrà $TM : MI :: RE : EO$; e per gli altri simili Mit, ed Eor si otterrà Mt, o sia $MT : Mi :: Er : Eo$; moltiplicando in corrispondenza queste due analogie, si avrà $TM^2 : IM \times Mi :: RE \times Er : OE \times Eo$; ma dei due rettangoli $IM \times Mi$,

ed $OE \times Eo$ ciascuno è uguale a CD^2 (346); dunque $TM^2 = RE \times Er$. Quindi pel 346, e per l' attual dimostrazione resta confermato, che *se da un qualunque punto dell' iperbole, conducesi una retta parallela alla tangente di tal curva nel vertice del suo asse primario, o di qualunque suo diametro, e che giunge fino ai suoi asintoti; il rettangolo dei segmenti di questa retta posti tra la curva ed i suoi asintoti, sempre pareggia il quadrato della tangente posta tral contatto ed un' asintoto.*

351. Se nell' iperbole mAE conducasi un suo qualsivoglia diametro CMV, nel cui vertice M sia Tt tangente della proposta curva, ed Em sia una doppia ordinata di tal diametro, la qual vada fino agli asintoti in R ed r, sarà $VR = Vr$ (340, 348); or pongansi $CM = \frac{1}{2} a'$, CN semiconjugato di $CM = \frac{1}{2} b'$, $TM = \frac{1}{2} q$, $CV = z'$, e $VE = y'$; ciò premesso i triangoli simili CMT, CVR offriranno $CM : MT :: CV : VR$, cioè $\frac{1}{2} a' : \frac{1}{2} q$, o sia $a' : q :: z' : VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; dunque $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, ed $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$;

onde essendo $RE \times Er = MT'^2 = \frac{1}{4} q^2$, sarà $\frac{q^2 z'^2}{a'^2} - y'^2 = \frac{1}{4} q^2$; ma (338) $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2} \times \left(z'^2 - \frac{1}{4} a'^2\right)$, quindi sostituendo, si avrà $\frac{q^2 z'^2}{a'^2} - \frac{b'^2 z'^2}{a'^2} + \frac{1}{4} b'^2 = \frac{1}{4} q^2$, o sìa $(q^2 - b'^2)\frac{z'^2}{a'^2} = \frac{1}{4}(q^2 - b'^2)$, o pure $(q^2 - b'^2)\frac{z'^2}{a'^2} - \frac{1}{4}(q^2 - b'^2) = 0$, ovvero $(q^2 - b'^2)\left(\frac{z'^2}{a'^2} - \frac{1}{4}\right) = 0$, per cui dividendo per $\frac{z'^2}{a'^2} - \frac{1}{4}$, si avrà $q^2 - b'^2 = 0$, $q = b'$, ed $\frac{1}{2} q = \frac{1}{2} b'$, o sia $TM = CN$; qual cosa si promise (342) di dimostrare; per cui si ha (*fig.* 43) $MI = CN$. Cioè *nella iperbole la tangente menata ad essa dal vertice di un suo qualunque diametro, è distesa fino ad un asintoto, pareggia il semiconjugato di un tal diametro.*

352. Dunque essendo (*fig.* 45) $RE \times Er = MT^2$ (350), sarà (351) $RE \times Er = CN^2$.

353. Da ciò rilevasi il facile modo di descrivere un' iperbole per assegnazion di punti, posto che sien dati di posizione e magnitudine due suoi qualunque semidiametri conjugati CM,

CN (*fig.* 46). In fatti, se dal vertice M del semidiametro CM conducesi al suo semiconjugato CN la parallela TMt, nella quale dall'una e dall'altra parte di M prendonsi le MT, Mt ciascuna uguale a CN; la TMt (349, e 351) sarà tangente della chiesta curva in M, ed incontrerà i suoi asintoti in T, e t; onde unito il dato centro C di tal curva coi due punti T, e t per mezzo delle CT, Ct, queste saranno i suoi asintoti. Quindi se per M si distendono fino agli asintoti quante rette si vogliono PMQ, PMQ, nelle quali da P, P prendonsi le PO, PO uguali alle rispettive parti MQ, MQ delle medesime; tutti i punti O, O determinati in tal modo, saran (348) della chiesta curva, ma però saran tutti a sinistra di M. Ora per aver quelli a destra di tal punto, converrà da qualunque degli anzidetti punti O condurre fino agli asintoti quante rette si vorranno ROS, ROS, ed indi prender su di esse le VS, VS uguali alle rispettive parti RO, RO delle medesime; per la stessa ragione mentovata poco anzi, quest'altri punti V, V saran pure della chiesta curva.

354. E con tal mezzo si può descrivere un'iperbole, che passa per un punto dato tra i lati di un angolo, e che ha i medesimi per asintoti.

355. Finalmente, dati gli asintoti di un'iperbole, bisegando l'angolo asintotico, e 'l suo supplemento, nelle seganti di questi angoli si avranno di tal curva gli assi in posizione, dei quali si determinerà la magnitudine nel modo indicato (345); avendosi così un'altro mezzo di risolvere lo stesso problema, di cui ivi trattossi.

Della Parabola.

356. Trattasi ora di stabilir le proprietà di quella curva, di cui qualunque punto è equidistante da un punto F dato di sito (*fig.* 47.), e da una retta XZ data di posizione; cioè di quella curva, da qualunque punto M della quale condotta ad F la MF, sarà questa uguale alla perpendicolare MH abbassata da M sopra di XZ.

Dal punto F conducasi su di XZ la perpendicolare FV, la qual si biseghi in A: questo sarà un punto della curva, per essere $AV = AF$, ed esso sen chiama il *vertice*.

Per rinvenir le proprietà di questa curva, la qual dicesi *parabola*, ricercar si deve una equazione, che esprime la relazione tra le perpendicolari MP abbassate da qualunque

punto M del suo perimetro su di FV, e le AP distanze di esse dal punto A. Porransi adunque AV, o $AF = c$, $AP = x$, $PM = y$; quindi saranno $MF = MH = VP = VA + AP = c + x$, $FP = AP - AF = x - c$. Ora il triangolo rettangolo FPM offre $FP^2 + PM^2 = FM^2$, in cui sostituendo gli algebrici valori, si ha $x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = c^2 + 2cx + x^2$; dunque trasponendo e riducendo, $y^2 = 4cx$, ch' è appunto l'equazion richiesta, da cui deduconsi le seguenti cose.

1. Per essere $y^2 = 4cx$, si ha $y = \pm\sqrt{4cx}$, cioè l'ordinata y, o PM corrispondente a ciascuna ascisse x, o AP, tien due valori uguali, ma di segni contrarj, per cui essi cadono dalle parti opposte della retta API, che dicesi l'*asse* della curva, i quali valori sono PM, e PM': quindi è che tal curva tien due rami perfettamente uguali, che estendonsi all'infinito, poichè è evidente, che potendo x crescere all' infinito, del pari $\sqrt{4cx}$, o sia y, potrà crescere all' infinito.

2. Se x si fa negativa, sarà $y = \pm\sqrt{-4cx}$, cioè immaginaria, donde deriva, che la curva non si estende al di sopra di A.

3. L' ascissa che corrisponde al punto F,

che dicesi *fuoco* della curva, è $AF = c$; dunque l'ordinata Fm' corrispondente allo stesso punto F si otterrà sostituendo c per x nel valor di y, onde essa sarà $Fm' = \pm\sqrt{4c^2} = \pm 2c$, e sarà il suo doppio $m'm'' = 4c$. Qual retta $m'm''$ dicesi *parametro dell'asse della parabola*. Dunque *il parametro dell'asse della parabola è quadruplo della distanza* AF *dal vertice al fuoco*.

4. Chiamando p tal parametro, sarà $4c = p$, e l'equazione della surriferita curva si muterà in $y^2 = px$.

357. Avendosi l'equazione della parabola, questa facilmente si potrà descrivere per assegnazion di punti, col dare ad x successivi diversi valori, e calcolando i corrispondenti di y.

358. La stessa curva si potrà anche per assegnazion di punti descrivere in quest'altro modo; cioè dato il punto A per vertice, e la retta indefinita TVI per la posizione dell'asse, si prenderanno dall'una parte e dall'altra di A le AV, AF ciascuna uguale alla quarta parte di un dato parametro P, il punto F sarà il fuoco; allor si eleveranno sull'asse da varj suoi punti P le perpendicolari indefinite MM', che si estenderanno dal-

l' una parte e dall'altra di esso; e descrivendo col centro F, ed intervallo le distanze PV, che gli enunciati punti P serbano da V, degli archi circolari, che taglieranno ciascuna delle perpendicolari MM' in due punti M, ed M', questi saran della parabola; perchè sonosi per costruzione le FM fatte uguali alle VP, cui sono uguali le MH, che intendonsi dai punti M abbassate perpendicolarmente su di XH, la quale da V supponesi condotta perpendicolarmente all' asse AP. Or quella retta XH dicesi *direttrice* della parabola.

359. Finalmente può descriversi una tal curva, di cui sien dati il fuoco F, e la direttrice ZX, con un movimento continuo, impiegando una squadra VHf, di cui un lato VH si farà scorrere lungo di ZX; mentre di un filo FMf flessibile, ed uguale all'altro lato Hf della squadra, essendosi un estremo legato nell' estremo f di Hf, e l' altro estremo nel dato fuoco F, con uno stiletto M, che si terrà sempre applicato contro di fH, tenderansi continuamente le due parti del filo, cioè l' una FM tral fuoco F e lo stiletto M, e l'altra Mf tra lo stiletto M e l'estremo f di Hf.

360. L' equazione $y^2 = px$ dinota, che per

ciascun punto M della curva, *il quadrato dell' ordinata* MP, *è uguale al rettangolo della corrispondente ascissa, nel parametro*.

In questa stessa equazione vedesi, che *i quadrati* y^2 *delle ordinate, son tra essi come le ascisse* x, cioè, che $PM^2 : pm^2 :: AP : ap$; poichè essendo $PM^2 = p \times AP$, e $pm^2 = p \times Ap$, sarà, $PM^2 : pm^2 :: p \times AP : p \times Ap :: AP : Ap$.

L' equazione all' ellisse rinvenuta (286), è $y^2 = \frac{4ac - 4c^2}{a^2}(ax - x^2)$; onde se supponesi, che l' asse maggiore a è infinito, in tal caso divengono infinite le quantità $4ac$, ed ax, e quindi trascurabili riguardo ad esse rispettivamente le seguenti $4c^2$, ed x^2; per cui l' indicata equazione riducesi a quest' altra $y^2 = \frac{4ac \times ax}{a^2} = \frac{4a^2cx}{a^2} = 4cx$, che è propria della parabola; dal che deducesi, che *la parabola è una ellisse di asse maggiore infinito*.

361. Se i punti F ed H unisconsi colla FH, cui da M si mena la perpendicolare MOT; questa sarà tangente della parabola in M.

In fatti, se ciò si nega, se è possibile sup-

pongasi MOT incontrar la parabola anche nell' altro punto N, e da questo conducansi le NF, NH, e di più su di XZ la perpendicolare NZ: per la supposizione dovrebb' essere $NZ = NF$, ma NF pareggia NH per i triangoli perfettamente uguali NOF, NOH, dunque sarebbe $NZ = NH$, cioè un cateto del triangolo rettangolo NZH, uguale alla sua ipotenusa, lo che ripugna.

362. Per la perfetta uguaglianza dei triangoli MOF, MOH, si ha l' angolo OMF uguale all' altro OMH; e poichè questo adegua il suo verticale fMN, perciò dev' essere $FMO = fMN$. Dunque i raggi di luce, che da F pervengono sulla concavità MAM', riflettonsi tutti parallelamente all' asse, e reciprocamente, i raggi che parallelamente all'asse percuotono sulla concavità MAM', vansi tutti a riunire nel fuoco F.

363. Per essere MH parallela a VP, ed HO uguale ad OF, saran simili ed uguali i triangoli HOM, TOF; dunque $FT = MH = PV = x + c$; onde $PT = TF + FP = x + c + x - c = 2x$. Quindi nella parabola la sottangente PT è dupla dell' ascissa AP.

364. Elevando da M la perpendicolare MI sulla tangente TM, i triangoli simili TPM,

PMI daranno $TP : PM :: PM : PI$; cioè $2x : y :: y : PI = \frac{y^2}{2x}$, o pure perchè $y^2 = px$, sarà $PI = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2} p$. Dunque la sunnormale è di un costante valore per ciascun punto della parabola, cioè uguale alla metà del parametro.

365. La parabola impiegasi per disegnare la *quaderna maestra* dei vascelli, cui voglia darsi molta *stella*. Descrivesi un rettangolo $ABCD$ (*fig.* 48.), la cui lunghezza AB è quella del *bajo*, ovvero *baglio*, e l'altezza è *la profondità del vascello*, o sia *l'altezza di puntale*: dall'una parte e dall'altra del punto medio E di DC prendonsi le EG, EH uguali ciascuna al *semispianato del madiere*, e condotte GM ed HL perpendicolari a DC, ed uguali ciascuna all'*acculamento*, descrivonsi le parabole uguali AM, BL che abbiano per vertici A e B, per comun asse la AB, e di cui la prima passi per M, e la seconda per L.

Per descrivere queste parabole, bisogna saperne il parametro; or se prolungasi GM fin che incontra AB in P, in tal caso MP sarà un ordinata, ed AP la corrispondente ascissa; ma l'equazione $y^2 = px$ dinotando che l'ordinata è media proporzionale tra l'ascissa e 'l parametro, dimostra che per trovare il parametro, può tirarsi AM, ed al suo estremo M elevar la perpendicolare MK, che incontrerà AB nel punto K, e determinerà KP per tal parametro; perchè a cagion dell'angolo retto AMK, la perpendicolare PM è media proporzionale tra AP, e PK. Essendosi in

tal modo determinato il parametro, potransi avere quanti punti si vorranno della parabola, col metodo esibito (358).

Quando son descritte tali parabole, si compie il *pian posato del madiere* impiegando due archi di cerchio, di cui uno MO rivolge la sua convessità all' in giù, e l' altro OS all' in su; e non solo bisogna, che i due archi MO ed OS si tocchino (lo che è facile per lo già detto in Geometria 49); ma fa d' uopo ancora che MO tocchi la parabola in M, lo che succederà se il centro dell' arco MO sarà in qualche punto R della perpendicolare MI alla parabola: or si è veduto (364), che per determinar questa perpendicolare, bisognava prender la sunnormale PI uguale al semiparametro; dunque si dovrà da M, al punto medio I di PK condurre la MI, e prendere su di questa il centro dell' arco MO. Un tal centro prendesi ordinariamente in modo, che il punto O, o l' arco MO incontra la MS tirata al bordo S della *chiglia* nel suo punto medio; a qual uopo prese le MF, ed FO uguali ciascuna al quarto di MS, si eleverà dal punto F su di MS la perpendicolare FR, che determinerà il centro R dell' arco MO; indi congiunti i punti R ed O colla RO, questa si prolungherà in T facendo OT uguale ad RO, T sarà il centro dell' arco OS; in modo che l' arco MO toccherà l' altro OS in O, e la parabola in M. L' altra metà si compie similmente.

366. Ogni retta MX (*fig.* 49) menata da un punto M della parabola parallelamente al suo asse AQ, chiamasi *diametro* di tal cur-

va; il quadruplo della distanza FM dal fuoco, al vertice M di un qualunque diametro, di questo dicesi *parametro*; e qualsisia retta mO menata da un punto m della parabola parallelamente alla tangente nel vertice M di tal diametro, dello stesso *ordinata* vien detta. Si dimostrerà, che le ordinate di un qual si voglia diametro, avranno le stesse proprietà delle ordinate dell' asse.

Si tiri all' asse l' ordinata MP, cui dai punti m, ed O si conducano le parallele mp, OQ; finalmente da m si meni mS parallela all' asse. Si pongano $AP = x$, $PM = y$, $Qp = g$, $AQ = k$; sarà $Ap = k - g$. Ora per i triangoli simili $TPM, mSO, TP : PM :: mS : SO$, cioè $2x : y :: g : SO = \frac{gy}{2x}$; dunque $pm = QS = QO - OS = PM - OS = y - \frac{gy}{2x}$; or poichè m è un punto della parabola, perciò (360) $pm^2 : PM^2 :: Ap : AP$; cioè $\left(y - \frac{gy}{2x}\right)^2 : y^2 :: k - g : x$; onde moltiplicando gli estremi, ed i medj, si ha $xy^2 - gy^2 + \frac{g^2y^2}{4x} = ky^2 - gy^2$, che riducesi (col dividere per y^2, e col sopprimere i termini

uguali in ambi i membri) ad $x + \frac{g^2}{4x} = k$, o pure a $\frac{g^2}{4x} = k - x$.

Ciò premesso, pongansi l'ascissa $MO = x'$, e l'ordinata $mO = y'$; sarà $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; cioè $x' = k - x = \frac{g^2}{4x}$, o sia $g^2 = 4xx'$; ma pel triangolo rettangolo mSO si ha $mS^2 + SO^2 = mO^2$, cioè $g^2 + \frac{g^2 y^2}{4x^2} = y'^2$; dunque sostituendo per g^2 il suo valore $4xx'$, e per y^2 il suo valore px, dopo eseguite le riduzioni, si avrà $4xx' + px' = y'^2$, o sia $(4x + p)\, x' = y'^2$. Ma se chiamasi p' il parametro del diametro MX, si avrà $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$; dunque finalmente $p'x' = y'^2$. Quindi l'equazione riguardante un qualunque diametro della parabola è la stessa di quella relativa all' asse. Onde *il quadrato dell' ordinata* mO *ad un qualunque diametro* MX *della parabola, pareggia il rettangolo della corrispondente ascissa nel parametro di tal diametro; ed i quadrati delle ordinate ad uno stesso diametro qualunque della parabola, son tra essi come le corrispondenti ascisse.*

367. Da tutto ciò che si è detto ne segue, che se vuol descriversi una parabola, che ha

una retta indefinita MX per diametro, di cui M è il vertice, ed una data retta p' il parametro, e dippiù è dato l'angolo contenuto dalle coordinate dello stesso diametro. Dal vertice M si condurrà la NMT, che conterrà con MX l'angolo NMX uguale al dato; per lo stesso punto M si menerà MF, che dall'altra parte di MX conterrà con TM l'angolo FMT pure uguale al dato, o sia ad NMX; e presa $MF = \frac{1}{4}p'$, il punto F sarà il fuoco della chiesta curva (362, e 366); dunque condotta per F la TFQ parallela ad MX, che incontra TM in M, essa sarà l'asse in posizione, il cui vertice A si determinerà abbassando da M su di TQ la perpendicolare MP, e bisegando PT in A (363). Allora avendosi il fuoco e 'l vertice, sarà facile descriver la chiesta parabola (358, e 359).

368. Le tre curve successivamente considerate sono state nominate *sezioni coniche*, perchè ottengonsi segando un cono con un piano in diverse guise. Per esempio, si ha l'ellisse $AMmB$ (*Fig.* 50) se tagliasi il cono CHI con un piano AMB, in modo che questo incontra i lati CH, CI di un qualunque triangolo CHI per l'asse di quel cono, nei due dunti A, e B sottoposti al suo vertice C:

bisogna solamente eccettuarne il caso, in cui la comune sezione AB del piano AMB, (che esser deve in tal circostanza perpendicolare al triangolo CHI, il qual non solo dev' esser per l'asse, ma anche per l'altezza del proposto cono), contenga con un lato CB di tal triangolo, l'angolo CBA uguale all'altro CIH, che contengono la base HI, ed il rimanente lato CI dello stesso triangolo; in questo caso la sezione è un cerchio, che dicesi *succontrario*, come si dimostrerà nella Navigazione.

Se poi il piano segante AMm (*Fig.* 51) incontra un lato CI di un triangolo CHI per l'asse, in A al di sotto del vertice C, e l'altro lato CH dello stesso triangolo, in B al di sopsa del vertice C, si ha l'iperbole AMm.

Finalmente ottiensi la parabola AMm, quando il piano segante incontra un lato CI di un qualunque triangolo CHI per l'asse, nel punto A al di sotto del vertice, ed è parallelo all' altro lato CH dello stesso triangolo (*). Eccone la dimostrazione.

(*) Il Traduttore. *Queste definizioni sono state recate in un modo un poco diverso da quello dell' Originale, affin di non produrre alcuna ambiguità; poichè dicendo l' Autore, che* l'ellisse sia quella che incontra due lati del cono al di sotto del vertice; *chi è colui che non vede essere anche l'iperbole e la parabola nello stesso caso? e dippiù secondo l' Autore medesimo è anche non molto soddisfacente la definizione dei cerchi succontrarj, come si potrà facilmente osservare nell' Originale.*

Concepiscasi il cono *CHI* (*fig.* 50, e 51) segato con un piano procedente per l'asse suo, si otterrà per sezione un triangolo (*); e di più il cono medesimo si seghi cogli altri tre piani *AMm*, *FMG*, *HmI*, perpendicolari all'anzidetto triangolo, e dei quali i due ultimi sien paralleli alla base del cono (**). Le due sezioni *FMG*, *HmI* saran cerchi (*Geom.* 199), che incontreranno la sezione *AMm*, in *M*, ed *m*. Le intersezioni, *FG*, *HI* di questi cerchi, collo stabilito triangolo per l'asse, saranno i diametri di questi cerchi medesimi. Le intersezioni *PM*, *pm* di questi cerchi, col piano *AMm*, saranno (*Geom.* 188) perpen-

---

(*) Il Traduttore. *È un teorema già dimostrato in altre istituzioni di coniche sezioni*, *che* la sezione fatta in un cono con un piano procedente pel suo vertice, è un triangolo rettilineo, il quale se passa per l'asse, dicesi triangolo per l'asse.

(**) Il Traduttore. *Una tal costruzione è possibile solo nel caso, in cui o il cono è retto, o pure il triangolo non soltanto è per l'asse, ma anche per l'altezza del cono, come l'è chiaro dalla Geometria solida; ambe le quali condizioni non sono in alcun modo dall'Autore espresse. Intanto è superflua l'una, o l'altra ipotesi, bastando un cono qualunque, ed un qualunque triangolo per l'asse; purchè però il piano della sezione proceda per una corda della base del cono, la qual sia perpendicolare alla base di un qualunque già condotto triangolo per l'asse, come è noto fin dai tempi del famoso Apollonio Pergeo.*

dicolari al medesimo triangolo per l' asse, e saranno nello stesso tempo ordinate di tali cerchi, e della sezione AMm.

Ciò posto, i triangoli simili APG, ApI esibiscono $AP : Ap :: PG : pI$, ed i triangoli simili BFP, BHp offrono $PB : pB :: FP : Hp$; moltiplicando in corrispondenza queste due analogie, si ha $AP \times PB : Ap \times pB :: FP \times PG : Hp \times pI$; ma per la natura del cerchio $FP \times PG = PM^2$, ed $Hp \times pI = pm^2$; dunque $AP \times PB : Ap \times pB :: PM^2 : pm^2$, cioè i quadrati delle ordinate della sezione AMm son tra essi, come i rettangoli delle corrispondenti ascisse prese da ambi i vertici; or tali ascisse cadono da ambi i lati dell'ordinata (*fig.* 50), e da un medesimo lato (*fig.* 51); dunque AMm (*fig.* 50) è un' ellisse, e (*fig.* 51) è un' iperbole.

In quanto alla figura 52, supponendo le stesse cose di qui sopra, per la natura del cerchio si ha $PM^2 = FP \times PG$, $pm^2 = Hp \times pI = FP \times pI$, per essere $FP = Hp$ a cagion delle parallele Pp, FH, ed FP, Hp; dunque $PM^2 : pm^2 :: FP \times PG : FP \times pI :: PG : pI :: AP : Ap$, per i triangoli simili APG, ApI; cioè i quadrati delle ordinate son tra essi come le corrispondenti ascisse, e quindi la curva è una parabola.

Riflessioni sulle Equazioni alle Sezioni coniche (*).

369. Da ciò che si è dimostrato (309) ne segue, che se nell' ellisse chiamasi x l' ascissa CO (*fig.* 38) presa dal centro, su di un qualunque diametro MM', y l' ordinata mO, che conseguentemente è parallela al suo conjugato CN; si avrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - x^2\right)$ per l'equazione a tal diametro, qualunque sia l' angolo contenuto da essi diametri conjugati. E se pel punto m menasi mO' parallela ad MM', e che quindi è un ordinata al diametro NN', allor ponendo $CO' = x'$, ed $mO' = y'$, si avrà $y = x'$, ed $x = y'$; e l' equazione diverrà $x'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - y'^2\right)$, da cui si ha $y'^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{4}b^2 - x'^2\right)$. Cioè a dire, che prendendo le ascisse dal centro, l' equazione per rapporto a qualunque siasi diametro, è sempre della stessa forma, fin tanto che però si fan le ordinate parallele al suo diametro conjugato.

Se $b = a$ l' equazione diviene $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$, che si è veduto (285) appartenere al cerchio. Ma bisogna bene osservare, che ciò si avvera quando le coordinate sono rettangole; poichè se esse sono obbliquan-

(*) Il Traduttore. *In questa interessante teoria dei Luoghi Geometrici, sono continuamente usati tutti i possibili rischiaramenti, per renderla più intelligibile ai Giovanetti Aspiranti. Si confronti coll' Originale.*

gole, la stessa equazione $y^2 = \frac{1}{4} a^2 - x^2$ appartiene all' ellisse riferita ai suoi diametri conjugati uguali, e non più al cerchio.

Per l' iperbole, se ponesi $= x$ l' ascissa CO (*fig.* 43), presa dal centro, sul diametro MM' terminato da ambe le parti alla curva, ed $= y$ l' ordinata mO parallela al suo diametro conjugato NN'; si avrà (338) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - \frac{1}{4} a^2\right)$ per l' equazione a tal diametro, qualunque sia l' angolo contenuto da essi diametri conjugati. Ma se menasi dal punto m' la retta $m'O$, parallela al diametro CM, e ponesi $= y'$ la $m'O$, che in tal caso è un ordinata del diametro NN', e ponesi l' ascissa $CO = x'$, si avrà $x' = y$, ed $y' = x$, lo che cambierà l' equazione in $x'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(y'^2 - \frac{1}{4} a^2\right)$, da cui si ha $y'^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(x'^2 + \frac{1}{4} b^2\right)$, ove vedesi che l' equazione in rapporto al diametro conjugato NN', non è simile a quella relativa al diametro MM', che va a terminare alla curva.

In riguardo alla parabola, si è osservato (366) che prendendo le ascisse dal vertice su di un qualunque diametro, e prendendo le ordinate parallele alla tangente nel vertice di tal diametro, l' equazione è sempre $y^2 = px$, col chiamare y l' ordinata, x l' ascissa, e p il parametro dello stesso diametro.

Finalmente rispetto all' iperbole riferita ai suoi asintoti, prendendo le ascisse del centro, e su di un asintoto, e le ordinate parallele all' altro asintoto, e di più ponendo le prime $= x$, le seconde $= y$, e la potenza

dell' iperbole $= a^2$; l' equazione di tal curva in riguardo agli asintoti è $xy = a^2$.

370. Ma bisogna bene osservare, che allora queste esposte equazioni si riferiscono alle enunciate curve, quando le ordinate y hanno il principio di esse dal diametro delle ascisse x, o pure, che val lo stesso, quando le ascisse x principiano dal diametro delle ordinate y; perchè si potrà avere un' equazione di alcuna delle esposte forme, e con tutto ciò essa non si riferirà ai diametri conjugati, se la medesima riguarda l' ellisse, o l' iperbole; o pure la stessa non esprimerà il rapporto delle coordinate di un diametro della parabola, se essa a tal curva appartiene. Per esempio, se (*fig.* 53) CM', CN son due semidiametri conjugati di un' ellisse $M'\ NM$, in riguardo ai quali si ha l'equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - x^2\right)$, in cui $CM' = \frac{1}{2}a$, $CN = \frac{1}{2}b$, $CQ = x$, e $QM = y$. Ora se pel centro C della proposta ellisse tirasi con qualunque posizione una retta indefinita FCE, che incontra le ordinate QM in E, e prendesi sul semidiametro CM', dal centro C, la retta cognita CB, dal cui estremo B menasi la BF parallela alle QM, la quale troncherà per conseguenza dalla ECF il segmento cognito CF; e pongonsi le $CE = z$, la $BC = m$, la $CF = n$. Allora dai triangoli simili CBF, CQE si ha $BC : CF :: CQ : CE$, o sia $m : n :: x : z$, onde $x = \frac{mz}{n}$; per cui se un tal valore di x sostituiscesi nella superiore equazione, essa commutasi nella seguente $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{m^2z^2}{n^2}\right)$, o sia $a^2n^2y^2$

$= \frac{1}{4} a^2 b^2 n^2 - b^2 m^2 z^2$, o pure $a^2 n^2 y^2 = b^2 m^2 \times \left(\frac{\frac{1}{4} a^2 n^2}{m^2} - z^2\right)$, la qual si ottiene col dividere il secondo membro per $b^2 m^2$, ed indicando nello stesso tempo la sua moltiplicazione per $b^2 m^2$; o pur finalmente

$y^2 = \frac{b^2 m^2}{a^2 n^2} \left(\frac{\frac{1}{4} a^2 n^2}{m^2} - z^2\right)$, equazione della stessa forma della superiore, ma che contro ragione, come vedesi, si riguarderà appartenere ai diametri conjugati della proposta ellisse, perchè mentre le ascisse z, o sia CE son prese sulla $l: CF$, le ordinate y o QM hanno il principio di esse dal diametro QM', e non già dal diametro ECF delle presenti ascisse.

371. Generalmente vedesi dunque 1.° che se si ha un'equazione del secondo grado, a due indeterminate x ed y, e se una delle indeterminate ha il suo principio dal diametro ove prendesi l'altra; tale equazione apparterrà all'ellisse riferita ai suoi diametri conjugati, o al cerchio, se non contiene altre potenze, che i soli quadrati di x, ed y, e tali quadrati delle indeterminate x ed y trovansi in differenti membri con differenti segni, e se nello stesso tempo tutta la quantità cognita trovasi in un membro col segno contrario al quadrato dell'indeterminata, che giace nello stesso membro, o collo stesso segno del quadrato dell'indeterminata, che giace nell'altro membro; perchè se abbiasi, per esempio, l'equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(-\frac{1}{4} a^2 - x^2\right)$, questa non esprimerà linea alcuna; poichè dalla medesima si ha $y =$

$\pm \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}\left(-\frac{1}{4}a^2 - x^2\right)\right]}$, che è una quantità immaginaria, o sia impossibile (98).

372. 2.° Se i quadrati delle due indeterminate x, ed y, posti in differenti membri, hanno lo stesso segno, e se non sonovi altre potenze di x, ed y, che i soli quadrati; allor l'equazione apparterrà sempre ad una iperbole riferita a qualche diametro che termina alla curva, o al suo conjugato, secondochè rispettivamente il termine tutto cognito, sarà di segno contrario a tali quadrati, o pur dello stesso segno.

373. 3.° Se l'equazione contiene il quadrato di una sola delle due indeterminate, e non ha che due soli termini, il secondo dei quali è il prodotto dell'altra indeterminata per una quantità cognita; essa apparterrà alla parabola riferita ad un dei suoi diametri, se tali due termini posti in differenti membri, hanno lo stesso segno; se poi questi termini son di segno contrario, allor l'equazione non esprime linea alcuna possibile.

374. 4.° Finalmente se l'equazione serba due soli termini, un dei quali è il prodotto delle due indeterminate x ed y, e l'altro una quantità tutta cognita; essa esprimerà l'iperbole riferita ai suoi asintoti, se tali termini posti in differenti membri hanno lo stesso segno; se poi hanno segno contrario, l'equazione esprimerà una linea impossibile, perchè in tal caso ritrovando il valore di una delle dne indeterminate, si avrà una quantità positiva, uguale ad un'altra negativa, lo che è un manifesto assurdo.

375. Tali sono le equazioni alle sezioni coniche riferite alle diverse linee, cui sonosi rapportate. In breve se ne vedrà l'uso; ma non è inutile dir di vantaggio,

che quante volte si avrà un'equazione a due indeterminate x ed y, la qual serberà le esposte condizioni, sarà sempre facile costruir la sezione conica cui essa apparterrà, col condursi come nel seguente esempio.

Suppongasi di aver l'equazione $ncd - qy^2 = gx^2$, essa si scriverà così $qy^2 = ncd - gx^2$, col porre nel primo membro positivamente il solo termine in cui è y^2, e tutti gli altri nel secondo membro; indi dividendo il secondo membro per g, ed indicando nello stesso tempo la moltiplicazione per g, si avrà $qy^2 = g\left(\frac{ncd}{g} - x^2\right)$ e finalmente $y^2 = \frac{g}{q}\left(\frac{ncd}{g} - x^2\right)$. Or posta l'equazione sotto di questa forma vedesi (309, e 371), che essa appartiene ad una ellisse, della quale il rapporto dei quadrati dei due diametri conjugati è $\frac{g}{q}$, ed il quadrato di quello di questi due diametri, sul quale si son prese le x, è $\frac{4ncd}{g}$. In fatti, paragonando questa equazione coll'altra $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - x^2\right)$, si ha $\frac{b^2}{a^2} = \frac{g}{q}$, ed $\frac{1}{4}a^2 = \frac{ncd}{g}$, cioè $a^2 = \frac{4ncd}{g}$. Da queste due equazioni rilevasi $a = \sqrt{\frac{4ncd}{g}}$, e $b = \sqrt{\frac{a^2 g}{q}} = a\sqrt{\frac{g}{q}} = \sqrt{\frac{4ncd}{g}} \times \sqrt{\frac{g}{q}} = \sqrt{\frac{4ncd}{q}}$, da cui restan pienamente determinati nella magnitudine i due diametri conjugati; in quanto alla posizione, essa si ha nell'angolo delle x ed y, il quale deve considerarsi dato per lo problema, che avrà condotto all'equazione $ncd - qy^2$

$= gx^2$. Or si è di già veduto (316) come conoscendo queste tre cose, si può descrivere l'ellisse.

Si terrà sempre un simile metodo per le equazioni alle altre sezioni, quando esse si rapporteranno ad alcune di quelle esposte di sopra. Si va ora a far vedere, che ogni equazione di secondo grado a due indeterminate, esprime sempre una sezione conica, o pure una linea impossibile (*); e ciò si dimostra facendo vedere, che ogni simile equazione si può sempre ricondurre ad alcuna di quelle che sonosi quì sopra recate. Si va ad esporne il metodo, ma affinchè il suo uso, e le costruzioni alle quali esso conduce riescan più chiari, è opportuno quì anteporre le seguenti riflessioni.

376. Poichè ogni problema che può essere algebricamente risoluto, conduce sempre ad una, o più equazioni; perciò ogni equazione a due indeterminate u, e t, può sempre considerarsi come proveniente da un problema, in cui queste due indeterminate u, e t rappresentino le due incognite. Qualunque sia un tal problema, può sempre considerarsi che l'equazione da esso risultante esprima la natura di una curva, lo che facilmente si comprende; perchè se ad una delle due incognite, per esempio ad u, si danno ad arbitrio e successivamente diversi valori, ed indi per mezzo dell'enunciata equazione, e delle algebriche regole, relativamente a ciascun valore già assegnato ad u, si calcola il corrispondente

(*) Bisogna solo eccettuarne il caso, in cui essa sarà il prodotto di due fattori del primo grado della forma $ax + by + c$, e $dx + fy + g$, nel qual caso essa non è realmente del secondo grado; ma un tal caso non può servire, e quindi non sarà posto ad esame.

valore di t; è chiaro potersi sempre prendere su di una retta AR (*fig.* 53, 54, e 55) terminata in A, ed indeterminata verso R, e cominciando sempre da A, i valori AP, AP, ec. che sonosi dati ad u, di menare dai punti P, P, ec. le rette PM, PM, ec. parallele tra esse, e sotto di un dato angolo con AR, e di far queste uguali rispettivamente ai valori già trovati per t: la serie dei punti M, M, ec. determinati in tal modo formerà una curva, la cui natura dipenderà dal rapporto delle rette AP e PM; e poichè questo rapporto è espresso dall' equazione, da cui tali rette sonosi rilevate; perciò questa equazione esprime la natura di quella curva.

Ciò posto, concepiscasi che la curva sia una sezione conica: è chiaro che come nel problema che ha somministrata l' indicata equazione si ignora, o ignorar si può, che un uso di questa equazione simile al suddetto, dia una sezione conica; così che le rette AP, PM non siansi disposte in modo, che l' una resti sulla direzione di un diametro, e l' altra ne giaccia parallela alla tangente nel vertice di questo, lo che è principalmente necessario acciò l' equazione abbia una delle surriferite forme. Vedesi dunque da ciò come può farsi, affinchè un' equazione che non ha alcuna dell' esposte forme, ciò non ostante appartenga pure ad una sezione conica.

377. Veggasi dunque ora come ogni equazione di secondo grado a due indeterminate, possa ricondursi ad avere una delle forme, che si è di già osservato appartenere alle sezioni coniche riferite alle linee, cui si son rapportate (369).

378. Il metodo che va ad esporsi suppone, che sappiasi eliminare il secondo termine da una equazione di secondo grado, ad una incognita; ciò si esegue facilmente

prima col rendere $=1$ il coefficiente del quadrato dell' incognita, e poi col supporre la sua incognita, accresciuta della metà del coefficiente del secondo termine, collo stesso segno che si trova avere, uguale ad un' altra incognita (*).

Per esempio, per eliminare il secondo termine dall'equazione $4x^2 + 12x = 9$, si divide essa per 4, e si ha $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; si suppone $x + \frac{3}{2} = z$, si eleva a quadrato, e si ottiene $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = z^2$, da cui $x^2 + 3x = z^2 - \frac{9}{4}$; indi un tal valore di $x^2 + 3x$ si sostituisce nell'equazione $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$, così riducesi essa a $z^2 - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, da cui $z^2 = \frac{18}{4}$, equazione che non ha più il secondo termine.

Se si avesse $x^2 - 4x = 7$, si farebbe $x - 2 = z$; quadrando, si avrebbe $x^2 - 4x + 4 = z^2$, cioè $x^2 - 4x = z^2 - 4$; e sostituendo, $z^2 - 4 = 7$, o sia $z^2 = 11$, equazione senza del secondo termine.

379. Se si vuole, si può similmente pareggiar l'incognita accresciuta della metà del coefficiente del secondo

---

(*) IL TRADUTTORE. *Se un poco si riflette vedesi, che questa regola è essenzialmente la stessa di quella recata* (192); *perchè tanto è far ciò, quanto il supporre l' incognita della proposta equazione, uguale ad un' altra incognita, da cui si tolga il coefficiente del suo secondo termine, prendendo però in considerazione il segno che ha, e diviso pria per l' esponente del primo. Ma intanto essa è più atta all' uopo.*

termine, non già ad una semplice incognita, ma ad un' incognita moltiplicata, o divisa per una quantità arbitraria, quale osservazione può servir qualche volta.

Per esempio, nell' equazione $x^2 - 4x = 7$, in vece di stabilir semplicemeute $x - 2 = z$, come quì sopra, può supporsi $x - 2 = \frac{k}{n} z$; operando sempre della stessa maniera, si avrà $x^2 - 4x + 4 = \frac{k^2}{n^2} z^2$, da cui $x^2 - 4x = \frac{k^2}{n^2} z^2 - 4$; e sostituendo, $\frac{k^2}{n^2} z^2 - 4 = 7$, o sia $\frac{k^2}{n^2} z^2 = 11$: bisogna però osservare, che qualunque sia la supposizione, sempre si ha lo stesso valor di x; in fatti, quest' ultima equazione offre $\frac{k}{n} z = \sqrt{11}$, e poichè si è supposto $x - 2 = \frac{k}{n} z$, perciò $x - 2 = \sqrt{11}$; e così pure nel supporre precedentemente $x - 2 = z$, si è avuto $z^2 = 11$, o sia z, cioè $x - 2 = \sqrt{11}$. A buon conto una qualunque di simili supposizioni, non altera in alcun modo ciò che si cerca; mentre l' introdurre in tal guisa una quantità arbitraria, facilità il mezzo di riempir certi vuoti, ai quali, regolando il calcolo diversamente, certe volte non si potrebbe supplire, che in una maniera indiretta, o molto più complicata.

Modo di ricondurre alle Sezioni coniche, ogni Equazione di secondo grado a due indeterminate, quando essa esprime una cosa possibile.

380. Supponghasi di aver l'equazione $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$, che contiene tutte le equazioni del secondo grado, a due indeterminate u, e t, in cui non manca alcun termine (*). Concepiscasi, che tale equazione appartenga ad una curva MM' (*fig.* 53 e 54), di cui AP, e PM sien le coordinate. Ecco come si assicura, che questa curva è una sezione conica, e come essa si determinerà.

Quando non manca alcun dei due quadrati t^2 ed u^2, bisogna eliminar successivamente il secondo termine di questa per rapporto a t, ed il secondo per rapporto ad u, lo che si farà nel seguente modo.

Dopo di aver rinchiuso tra due parentesi tutti i fattori della prima potenza di t, si libera t^2 dal suo coefficiente, e si ha $t^2 + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \frac{eu^2}{d} + \frac{geu}{d} + hd = 0$ .... (A). Dunque (378) si fa $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$,

(*) Il Traduttore. *Un'equazione di secondo grado a due indeterminate, per esser completa è chiaro, che contener debba il quadrato di un' indeterminata, il quadrato dell' altra, il prodotto delle due indeterminate, la prima potenza di una di esse, la prima potenza dell' altra, e 'l termine cognito, cioè, in tutto sei termini dell' esposta natura, come appunto è quella recata dall' Illustre Autore.*

e quadrando si ha $t^2 + \left(f + \frac{cu}{d}\right) t + \frac{1}{4}f^2 + \frac{fcu}{2d} + \frac{c^2 u^2}{4d^2} = y^2$, per cui $t^2 + \left(f + \frac{cu}{d}\right) t = y^2 - \frac{1}{4}f^2 - \frac{fcu}{2d} - \frac{c^2 u^2}{4d^2}$: sostituendo nell' equazione A, ed indi trasponendo per rendere y^2 sola, si ha $y^2 = \frac{1}{4} f^2 + \frac{fcu}{2d} + \frac{c^2 u^2}{4d^2} - \frac{eu^2}{d} - \frac{geu}{d} - hd$, e moltiplicando questa per $4d^2$, e riunendo i termini che son moltiplicati per simili potenze di u, risulta $4d^2 y^2 = f^2 d^2 - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)\, u + (c^2 - 4de)\, u^2$.

Come le d, c, e, f ec. rappresentano quantità cognite, così per brevità si può porre $f^2 d^2 - 4hd^3$ uguale ad una sola cognita r, $2cfd - 4ged = q$, e $c^2 - 4de = m$; e l' ultima equazione diviene $4d^2 y^2 = r + qu + mu^2$, in cui m, q, r possono essere positive, o negative.

Si elimini ora il secondo termine in riguardo ad u, a qual uopo si liberi u^2, dal che si ha $u^2 + \frac{q}{m} u + \frac{r}{m} = \frac{4d^2}{m} y^2 \ldots (B)$. Ma in vece di porre $u + \frac{q}{2m}$ uguale ad una sola indeterminata x, secondo la regola del (378), stabiliscasi $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ (379), cioè uguale ad un' altra indeterminata x moltiplicata per la metà del coefficiente del secondo termine, e divisa per

un' altra quantità n incognita per ora, ma che in breve si determinerà (*).

Si ha dunque $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, quadrando, si ha $u^2 + \frac{qu}{m} + \frac{q^2}{4m^2} = \frac{q^2 x^2}{4m^2 n^2}$, o sia $u^2 + \frac{qu}{m} = \frac{q^2 x^2}{4m^2 n^2} - \frac{q^2}{4m^2}$; sostituendo nell' equazione (B), si ottiene $\frac{q^2 x^2}{4m^2 n^2} - \frac{q^2}{4m^2} + \frac{r}{m} = \frac{4d^2}{m} y^2$, equazione che appartiene all' ellisse o all' iperbole, fin che niuna delle quantità d, m, q, r è uguale a zero, tranne il caso in cui essa non esprime linea alcuna, come sarà poi osservato.

Si esamini ora quando la curva è ellisse, quando iperbole, e quando impossibile.

A tal uopo, si liberi y^2, e si avrà $y^2 = \frac{q^2 x^2}{16mn^2 d^2} - \frac{q^2}{16md^2} + \frac{r}{4d^2}$, o pur dividendo il secondo membro pel coefficiente di x^2, ed indicando nello stesso tempo la moltiplicazione per tal coefficiente, si ottiene $y^2 = \frac{q^2}{16mn^2 d^2}\left(x^2 - n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2}\right)$ equazione, in cui le quantità q, n, e d trovandosi elevate a quadrato, non posson certamente cambiare i suoi segni, che quindi

(*) Questa quantità n è stata introdotta per poter ricondurre direttamente l' equazione, ai diametri conjugati. Se si pareggiasse soltanto ad x, l' equazione finale acquisterebbe la forma riguardante l' ellisse o l' iperbole, ma essa sarebbe nel caso esposto (370).

lo potranno essere soltanto per m o r, secondochè queste saran positive o negative; e poichè, com' è chiaro, r non interviene per fattore nè in x^2, nè in y^2, perciò la varietà del segno di r non introduce cambiamento nella curva, cui appartiene tale equazione. In riguardo ad m, se essa è negativa, l'equazione diviene $y^2 = \frac{q^2}{-16mn^2 d^2}\left(x^2 - n^2 - \frac{4mrn^2}{q^2}\right)$

$= \frac{q^2}{16mn^2 d^2}\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)$, col cambiare i segni sì nel numeratore, che nel denominatore. Vedesi dunque (371, e 372), che la curva sarà iperbole, o ellisse, secondochè la m sarà rispettivamente positiva, o negativa; ora qui sopra si è supposto $c^2 - 4de = m$, ed in $c^2 - 4de$ la c^2 è sempre positiva, qualunque sia il segno di c, laddove $-4de$ è negativa, se d ed e sono ambedue dello stesso segno; dunque m o sia $c^2 - 4de$ è negativa, quando d, ed e sono dello stesso segno, e di più c^2 è minore del quadruplo prodotto di esse. Ma c^2 è il quadrato del coefficiente c del termine ut, prodotto delle due indeterminate u, e t della proposta equazione; d, ed e sono i coefficienti dei termini t^2, ed u^2, quadrati delle stesse indeterminate. Dunque per sapere se un'equazione di secondo grado, a due indeterminate, nella quale non manca termine alcuno, appartiene all' ellisse, o all' iperbole, bisogna osservar la regola seguente.

381. *Se il quadrato del coefficiente del termine, che conserva il prodotto delle due indeterminate dell'equazione, toltone il quadruplo prodotto dei coefficienti dei due termini, che sono i quadrati delle medesime indeterminate; in qual prodotto si tenga esatto conto dei*

segni di tali termini, esibisce una differenza negativa, o positiva; la curva sarà rispettivamente un' ellisse, o un' iperbole; e se nel caso della differenza negativa fossero uguali tra essi i coefficienti dei termini, che sono i quadrati delle due indeterminate, allor la curva può essere un cerchio, come da quì a poco si vedrà (*).

Se r è negativa, la quantità $n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2}$ si ridurrà ad $n^2 - \frac{4mrn^2}{q^2} = n^2 \left(1 - \frac{4mr}{q^2}\right)$. Ora questa quantità diviene negativa se $\frac{4mr}{q^2} > 1$, ma se $\frac{4mr}{q^2} > 1$, moltiplicando questo rapporto di maggioranza per q^2, sarà $4mr > q^2$, e dividendo quest' altro per $4m$, sarà $r > \frac{q^2}{4m}$. Dunque se r è negativa, ed è maggiore di $\frac{q^2}{4m}$, la quantità $n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2}$ sarà negativa; per cui l' equazione $y^2 = \frac{q^2}{16mn^2 d^2}\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)$ avrà

(*) Il Traduttore. *Se i coefficienti dei termini, che sono i quadrati delle due indeterminate hanno lo stesso segno, il prodotto di essi sarà quindi positivo, onde sottraendo un tal prodotto positivo, diverrà negativo, e si potrà aver la differenza negativa, se il quadruplo di un tal prodotto sarà maggiore del quadrato del coefficiente del termine, ch' è il prodotto delle due indeterminate, per cui in tal caso si avrà l'ellisse. Se poi quei due primi coefficienti saran di segni contrarj, il prodotto di essi sarà negativo, per cui sottratto, diverrà positivo, e la suddetta differenza sarà per conseguenza positiva, ed in questo caso si avrà l' iperbole.*

in tal caso il secondo membro tutto negativo, e quindi il valore di y sarà immaginario, e perciò impossibile la curva. Ma r rappresenta $f^2 d^2 - 4hd^3$, $q = 2cfd - 4ged$, e quindi $q^2 = (2cfd - 4ged)^2$, $m = c^2 - 4de$, onde $4m = 4c^2 - 16de$. Dunque *l'impossibilità della curva si rileva dal ravvisare nei coefficienti dell'equazione proposta, se* $f^2 d^2 - 4hd^3$ *è negativa, ed è maggiore di* $\frac{(2cfd - 4ged)^2}{4c^2 - 16de}$; qual caso forma un' eccezione della proposta regola.

Resta ora a far vedere come si può descrivere la ravvisata ellisse, o pure iperbole; si consideri adunque l'ellisse.

382. Delle due equazioni $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, ed $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, che sonosi adoprate per eliminare i secondi termini, la seconda nel caso attuale, nel quale m è negativa, cambiasi in $u - \frac{q}{2m} = - \frac{qx}{2mn}$; ma come n è una quantità introdotta ad arbitrio, così si può supporre indifferentemente positiva, o negativa: per cui supponendola negativa, si ha $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$. Costruiscansi dunque queste due equazioni $t + \frac{1}{2} f + \frac{cu}{2d} = y$, ed $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, affin di avere la posizione dei due diametri conjugati.

La prima di esse, cioè $t + \frac{1}{2} f + \frac{cu}{2d} = y$ fa ve-

dere, che per avere y bisogna aumentar ciascuna delle t per la quantità $\frac{1}{2} f + \frac{cu}{2d}$; dunque dal punto A, il qual sappiasi essere l'origine delle u e delle t (*fig.* 53), si meni la retta $AB = \frac{1}{2} f$, e parallela alle t, o sia PM. Pel punto B si conduca l'altra BKI parallela ad AR, sulla quale sappiasi, che si prendon le u, o sia le AP; e di più presa ad arbitrio la BK, dal suo estremo K si tiri KL parallela ad AB, e che sia quarta proporzionale in ordine a d, $\frac{1}{2} c$, e BK, il punto L sarà dato. Ora se per i dati punti B ed L si conduca l'indefinita BLQ, le QM che si considereranno cominciare ove la BLQ incontra le PM, saranno i valori di y. In fatti, per i triangoli simili BKL, BIQ si ha $BK : KL :: BI$, o sia $AP : IQ$, ma per costruzione $BK : KL :: d : \frac{1}{2} c$, dunque $d : \frac{1}{2} c :: u : IQ = \frac{cu}{2d}$; ma $QM = MP + PI + IQ$, dunque $QM = t + \frac{1}{2} f + \frac{cu}{2d} = y$. Poichè le y principiano dalla retta BLQ, ne segue (370) che acciò l'equazione all'ellisse $y^2 = \frac{q^2}{16mn^2 d^2} \left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2 \right)$ trovata di sopra, appartenga ai diametri conjugati, che le x si prendano sulla stessa BLQ, e che abbiano il principio di esse dal centro. Cerchisi ora di determinare tal centro.

Poichè si è dimostrato, che le ascisse debbonsi prendere su di BLQ, e poichè esse cominciano dal centro;

perciò questo sarà quel punto di LQ, in cui $x = o$. Suppongasi dunque $x = o$, sarà anche $qx = o$, e quindi $\frac{qx}{2mn} = o$; onde la seconda $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ delle anzidette due equazioni, in tal supposizione si muterà in $u - \frac{q}{2m} = o$; sicchè in tal caso sarà $u = \frac{q}{2m}$ non più indeterminata, ma determinata come effettivamente dev'essere, perchè uno è il centro; e perciò all'opposto, se $u = \frac{q}{2m}$, sarà $x = o$: di più le x vengon troncate dalle y, e queste procedono per gli estremi delle u. Dunque se fatta una delle $u = \frac{q}{2m}$, ed essa sia la AG, per l'estremo di questa, si conduca la corrispondente y, o sia NC; il punto C in cui quest'altra incontrerà BLQ, sarà il chiesto centro. Da ciò facilmente si ha il valore della quantità arbitraria n introdotta fin da principio, per eliminare il secondo termine in riguardo ad u; poichè presa una qualunque u, o sia AP, diversa da quella AG, che si è fatta uguale a $\frac{q}{2m}$, sarà $AP - AG$, o sia $PG = u - \frac{q}{2m}$, ma $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, dunque $PG = \frac{qx}{2mn} = \frac{q}{2m} \times \frac{x}{n}$; ma alla $u = AP$, corrisponde la $y = QM$, ed a questa, la $x = CQ$, onde nel valore $\frac{q}{2m} \times \frac{x}{n}$ di PG, sostituendo i valori geometrici di $\frac{q}{2m}$, e di x, sarà $PG = AG \times \frac{CQ}{n}$, o sia togliendo il fratto, $PG \times n$

$= AG \times CQ$, onde $PG : GA :: CQ : n$; ma per le parallele QP, CG, BA si ha $PG : GA :: QC : CB$, onde in ordine alle PG, GA, QC vi è quarta proporzionale sì n, che CB, per cui $n = CB$. Quindi affinchè l' equazione all' ellisse trovata quì sopra appartenga a due diametri conjugati, la cui posizione sia dinotata dall' angolo BCN, bisogna in vece della quantità arbitraria n, porre la BC, il cui valore si è già determinato colle precedenti costruzioni.

Dunque per descrivere quest' ellisse, riman solamente a determinare la magnitudine di tali diametri conjugati, lo che è facile, coll'imitare ciò che si è fatto (375); cioè si paragona l' equazione..............................

$y^2 = \frac{q^2}{16 mn^2 d^2} \left(n^2 + \frac{4 mrn^2}{q^2} - x^2 \right)$, coll' altra generale all'ellisse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{4} a^2 - x^2 \right)$, e si rileva da ciò il pareggiamento delle grandezze analoghe, per cui si avrà $\frac{b^2}{a^2} = \frac{q^2}{16 mn^2 d^2}$, ed $\frac{1}{4} a^2 = n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2}$; dalle quali equazioni mediante i soliti calcoli, rilevasi

$$a = \sqrt{\left(4 n^2 + \frac{16mrn^2}{q^2} \right)}, \text{ e } b = \sqrt{\left(\frac{q^2}{4md^2} + \frac{r}{d^2} \right)};$$

e poichè n, m, q, r, d son tutte grandezze cognite, perciò resta così determinata la magnitudine dei diametri conjugati a, e b, colla quale, e coll' angolo BCN che essi debbono comprendere, si descriverà l'ellisse col metodo esibito (316).

383. Devesi osservare, che se i valori di a, e b sono uguali, e che nello stesso tempo l' angolo BCN è retto, la curva è un cerchio. Se vuol determinarsi ciò

quando si avvera, devesi 1.° supporre nell'ottenuta equazione all'ellisse, che $\frac{q^2}{16mn^2 d^2} = 1$, cioè che $q^2 = 16mn^2 d^2$, da cui ne risulta $n^2 = \frac{q^2}{16md^2}$. 2.° Se l'angolo BCD è retto, dev'essere $BC^2 + CD^2 = BD^2 = AG^2$; ma $BC = n$, onde $BC^2 = n^2 = \frac{q^2}{16md^2}$; e dai triangoli simili BLK, BCD si ha $BK : KL :: BD$ o sia $AG : CD$, cioè $d : \frac{1}{2} c :: \frac{q}{2m} : CD = \frac{qc}{4md}$, per cui $CD^2 = \frac{q^2 c^2}{16m^2 d^2}$: dunque sostituendo in $BC^2 + CD^2 = AG^2$ questi valori analitici, sarà $\frac{q^2}{16md^2} + \frac{q^2 c^2}{16m^2 d^2} = \frac{q^2}{4m^2}$, da cui cogli usitati calcoli, si ottiene $m + c^2 = 4d^2$, ed $m = 4d^2 - c^2$; ma di sopra m si è posta $= c^2 - 4de$, e dovendo nell'attual caso dell'ellisse, o del cerchio esser negativa la m, perciò ora dev'essere $-m = c^2 - 4de$ per cui $m = 4de - c^2$; onde $4d^2 - c^2 = 4de - c^2$, o sia $4d^2 = 4de$, e finalmente $d = e$.

384. Vedesi dunque, che *per sapere se la curva è un cerchio, un'ellisse, o un'iperbole*, è inutile riguardare gli ultimi tre termini fdt, geu, ed hd^2 dell'equazione $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$; ciò dipendendo solo dai suoi primi tre termini dt^2, cut, ed eu^2, perchè se la quantità $c^2 - 4de$, che risulta dai coefficienti di questi, è negativa, o positiva, la curva sarà rispettivamente un'ellisse, o un'iperbole; e di più nel

caso di $c^2 - 4de$ negativa, se si avvera nello stesso tempo, che $d = e$ cioè che i quadrati t^2, ed u^2 delle due indeterminate serbano lo stesso coefficiente, allor la curva sarà un cerchio, però se si avvererà pure esser retto l'angolo delle novelle coordinate.

385. Tutto ciò che si è detto, eccetto quello contenuto nel n.° 383, si applica ugualmente all'iperbole, cioè all'equazione $y^2 = \frac{q^2}{10mn^2 d^2}\left(x^2 - n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2}\right)$, colla sola differenza dei segni. Così rileggendo tutto il precedente, ed applicandolo alla *fig* 54, devesi fare il solo cambiamento di portare AG all'opposto di AP, lo che è indicato dall'equazione $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, che si è avuta da principio (380). Del resto tutto è lo stesso, cambiando la parola *ellisse* in quella d'*iperbole*.

Nei differenti casi particolari le grandezze AG, BK, AB, KL (*fig.* 53, e 54) possonsi trovar disposte tutto al contrario di quel che vedesi in tali figure; ma questi cambiamenti saran sempre indicati dai segni delle grandezze d, c, f, m, q, ec., nelle equazioni $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, ed $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, che ottengonsi nella eliminazione dei secondi termini.

386. Rimangono ad esaminarsi due casi, cioè 1.° quello in cui $c^2 - 4de = 0$, 2.° l'altro ove nello stesso tempo $d = 0$, ed $c = 0$.

Nel primo caso di $c^2 - 4de = 0$, o sia di $c^2 = 4de$, la curva è una parabola. E come in tal caso $m = 0$, così diviene inutile la precedente costruzione; perchè dopo di aver eliminato il secondo termine in riguardo

a t, il termine u^2 non più vi si trova. Questo caso si riconosce facilmente coll' osservare se nell' equazione si ha $c^2 = 4de$, cioè se i tre termini t^2, ut, ed u^2 formano un quadrato; perchè dall' essere $c^2 = 4de$, si ha $c = 2\sqrt{de}$, qual cosa cambia i tre primi termini dell' equazione in $dt^2 + 2ut\sqrt{de} + eu^2$, che è il quadrato di $t\sqrt{d} + u\sqrt{e}$.

In questo caso si eliminerà, come quì avanti, il secondo termine per rapporto a t, ed oprando parola per parola come quì sopra, l'equazione si ridurrà a $4d^2y^2 = r + qu$; allora per ricondurre quest'ultima alla forma $y^2 = px$, ch'è (369) quella della parabola riferita ad un diametro, le cui ordinate son parallele alla tangente nel suo vertice, si libererà y^2, avendosi così $y^2 = \frac{r+qu}{4d^2}$; si farà questo secondo membro uguale ad una nuova indeterminata x, moltiplicata per un numero n da determinarsi da quì a poco, cioè si farà $\frac{r+qu}{4d^2} = nx$; e si otterrà $y^2 = nx$. Resterà dunque sol tanto di costruir l'equazione $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, che si è impiegata per eliminare il secondo termine in riguardo a t; e l'altra $\frac{r+qu}{4d^2} = nx$, che avrà servito alla seconda riduzione. E poichè la prima di queste due equazioni è precisamente la stessa di quella che si è costruita (382), perciò quì si costruirà similmente; così devesi solo applicare parola per parola alla figura 55, tutto ciò ch'è stato detto (382) per la figura 53, in riguardo alla costruzione di $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; quindi le QM (*fig.* 55)

rappresenteranno le y, e BLQ sarà la posizione del diametro sul quale debbon prendersi le x.

Per determinare l'origine delle x, o sia il vertice di tal diametro, devesi conseguentemente impiegare quell'equazione in cui è x; cioè quella $\frac{r+qu}{4d^2} = nx$, che si è destinata per la seconda delle suddette riduzioni. E poichè il vertice di questo diametro è quel punto di esso, ove l'ascissa è zero, perciò suppongasi $x = o$; allora quest' ultima equazione diviene $\frac{r+qu}{4d^2} = o$, onde $r + qu = o$, $qu = - r$, ed $u = - \frac{r}{q}$. Quindi per aversi il vertice dell' indicato diametro, cioè $x = o$, la y corrispondente a questa x deve procedere per l' estremo di una delle u, la qual sia $= - \frac{r}{q}$; onde tutto all' opposto, se si fa una delle $u = - \frac{r}{q}$, e pel suo estremo si conduce la y in posizione, o sia la parallela alle t, ovvero PM, il punto in cui tal parallela incontrerà CLQ, darà $x = o$, cioè il vertice suddetto. Ora per fare $u = - \frac{r}{q}$ convien farla $= \frac{r}{q}$, e prenderla dal punto A, all' opposto delle AP, ed essa sia AG; per cui menando da G la GC parallela alle PM, il punto C ove essa incontra il diametro CLQ, sarà il vertice di questo.

Riman solo a determinare il parametro n; a tal uopo perchè poc' anzi si è avuta $GP = \frac{4d^2\, nx}{q}$, e di più

per le parallele CD, e CI sta BC : BD, o sia AC :

CQ : DI, o pure CP, cioè BC : $\frac{r}{q}$ :: [illegible]

perciò $BC = \frac{r}{4d^2 n}$, ed $n =$ [illegible]. Ora r, e d son date nell'equazione, e BC è determinata per la costruzione; dunque è noto il parametro a; e di più questa stessa costruzione determina nello stesso tempo l'angolo delle coordinate CQ, e QM, o sia x, e y; dunque con questi dati facilmente si costruisce la parabola, per quel ch'è stato esposto (36[illegible]).

387. Se nell'equazione generale manca il termine cut prodotto delle due indeterminate, deve in conseguenza essere $= 0$ il coefficiente c di tal termine; onde in tal caso se si avvera l'equazione $c^2 = 4de$, cioè che l'equazione generale appartiene alla parabola; nel caso medesimo l'equazione $c^2 = 4de$, si muta in $4de = 0$, da cui ne risulta $d = 0$, o pure $e = 0$, cioè che manca pure, o il termine dt^2, o pur l'altro eu^2. Dunque se nell'equazione generale si avvera $c^2 = 4de$, cioè che essa appartiene alla parabola; ed in tale equazione manca il termine cut prodotto delle due indeterminate: nella stessa equazione dovrà mancar pure, o il termine dt^2, o l'altro eu^2, cioè mancherà, o il quadrato t^2 di un'indeterminata, o l'altro u^2 dell'altra di esse.

388. Se i quadrati t^2, ed u^2 trovansi ambidue nell'equazione generale, ed in essa vi manca il prodotto ut; allor la costruzione esibita (382), la qual riguarda le figure 53 e 54, divien più semplice, perchè essendo $c = 0$, è pure $KL = 0$, per cui BL si distende su di BK, la quale in tal caso divien un diametro, e le

rette dinotanti le x, e le y trovansi parallele a quelle dinotanti le u, e le t. In questo stesso caso l'eliminazione del secondo termine in riguardo ad u, si farà senza impiegar l'incognita n, perchè BC che è n (382) essendo allora uguale a BD, o sia AG, si ha $n = \frac{q}{2m}$; onde l'equazione $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, che si è avuta per eliminare il secondo termine per rapporto ad u, si riduce ad $u + \frac{q}{2m} = \frac{q}{2m} \times \frac{x}{n} = n \times \frac{x}{n} = x$.

Da ciò ne segue, che nel caso presente affinchè la curva sia un cerchio, debbonsi non solo avverar le condizioni del n.° 384, ma anche che sia retto l'angolo delle coordinare u, e t.

389. Quando nell' equazione trovasi il prodotto ut, se dopo di aver eliminato il secondo termine per rapporto ad una delle due indeterminate, per esempio, per rapporto a t, non si trovasse altra potenza dell'altra indeterminata u, che il solo quadrato; allora benchè non siavi altro secondo termine da eliminare, pure dovrà farsi una trasformazione, che consisterà in supporre $u = \frac{lx}{n}$, in cui $\frac{l}{n}$ sarà una frazione incognita, ma che allor si determinerà dalla stessa costruzione, in un modo simile a quello praticato (382). In seguito se ne darà un esempio.

390. Se dei tre termini t^2, ut, ed u^2 manca un dei quadrati, l'equazione appartien sempre ad un'iperbole, o pure non esprimerà alcuna curva, perchè se d, o e è zero, la quantità $c^2 - 4de$ riducendosi a c^2, è essenzialmente positiva (384).

391. Finalmente se i due quadrati t^2, ed u^2 mancano nello stesso tempo, in qual caso si ha un'equazione di questa forma $gut + ht - ku - l = 0$, ove g, h, k, l sieno indifferentemente positive, o negative, si può far pure uso della costruzione esposta (382). L' equazione appartiene all' iperbole riferita ai suoi asintoti; ma come le ascisse, e le ordinate non son computate dal centro, così vi si ricondurranno nel seguente modo.

Si libererà il prodotto ut, e si avrà $ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = 0$; si porrà l'aggregato dei fattori di u, uguale ad un' indeterminato y, cioè $t - \frac{k}{g} = y$, da cui si ha $t = y + \frac{k}{g}$, qual valore di t si sostituirà nell' equazione $ut + \frac{ht}{g}$, ec $= 0$, e si avrà $uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{g^2} - \frac{l}{g} = 0$; dopo di questa trasformazione, si farà l'aggregato dei fattori di y, uguale ad un' altra indeterminata x, cioè $u + \frac{h}{g} = x$, e si avrà $u = x - \frac{h}{g}$, qual valore di u sostituito nell'equazione $uy + \frac{hy}{g}$, ec $= 0$, ne risulterà $xy + \frac{hk}{g^2} - \frac{l}{g} = 0$, o sia $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{g^2}$, che riguarda l' iperbole riferita agli asintoti suoi, ove le ascisse x si computano dal centro, e su di un asintoto, e le ordinate y cominciano da questo asintoto, e procedono parallelamente all' altro; finalmente la potenza di tale iperbole è $\frac{l}{g} - \frac{hk}{g^2}$ (347).

Per costruir quest' iperbole, le due equazioni $t - \frac{k}{g} = y$, ed $u + \frac{h}{g} = x$, che sonosi impiegate per ridurla, si costruiranno nel seguente modo. Cioè riflettendo, che come $y = t - \frac{k}{g}$, cioè che per aversi y, bisogna diminuir ciascuna t della grandezza $\frac{k}{g}$; così dal punto A origine delle u, e delle t, si menerà la retta AB parallela alle PM, o sia t, ed uguale a $\frac{k}{g}$; indi per B si tirerà la retta CBQ parallela ad AP; le rette QM saranno le y, perchè ogni $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$.

In oltre perchè l' equazione $u + \frac{h}{g} = x$ dinota, che per aversi x bisogna aumentar ciascuna delle u, o sia ciascuna AP, della grandezza $\frac{h}{g}$; perciò dal punto A, ed all'opposto di AP, si condurrà la retta $AG = \frac{h}{g}$, e dal punto G si menerà la GS parallela alle PM, che incontrerà BQ in C; le CQ saran le x, perchè ogni $CQ = CB + BQ = AG + AP = \frac{h}{g} + u = x$, e C sarà il centro dell'iperbole, di cui CQ, e CS saranno gli asintoti. Avendosi gli asintoti, e l' equazione $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{g^2}$, si descriverà l' iperbole nel modo esposto (354).

Se i primi tre termini t^2, ut, ed u^2 mancan tutti nell' equazione, allora essa esprime una linea retta, la cui costruzione è facile in seguito di ciò, che si è detto sulla costruzione delle equazioni impiegate per le precedenti riduzioni.

392. Così, 1.° ogni equazione di secondo grado, a due indeterminate, e che non è decomponibile in due fattori del primo grado, della forma $mx + ny + q'$, esprime sempre una sezione conica, o non esprime linea alcuna. 2.° Questa curva è ellisse, o iperbole, o parabola, secondochè il quadrato del coefficiente del prodotto delle due indeterminate, diminuito del quadruplo prodotto dei coefficienti dei quadrati delle stesse indeterminate, dà un risultato rispettivamente negativo, positivo, o zero; e particolarmente essa può essere un cerchio, se essendo negativo un tal risultato, sieno uguali i coefficienti dei quadrati delle medesime indeterminate. E per ricondurre ogni equazione appartenente ad una sezione conica, alle equazioni esibite nel trattar di tali curve, bisogna conformarsi a ciò che si è praticato (380, 386, 388, 389, e 391).

Applicazione di ciò che si è esposto, al risolvimento di qualche problema indeterminato.

393. Per far conoscere l' uso delle trasformazioni, che sonosi esposte, si propone per primo problema, di *Trovar qual' è la curva* (fig. 57.), *le distanze di ciascun punto* M *della quale, a due punti dati* A, *e* B, *sien sempre in una data ragione di* g *ad* h.

Si immagini, che da ciascun punto M di tal curva, sia abbassata la perpendicola e MP sulla congiungente AB dei dati punti; e si cerchi il rapporto di queste perpendicolari, colle distanze di esse dal punto A; a tal uopo si pongano $AP = u$, $PM = t$, e la nota $AB = c$, sarà dunque $BP = u - c$.

Ciò premesso, il triangolo rettangolo APM offre $AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)} = \sqrt{(u^2 + t^2)}$, e dall' altro triangolo rettangolo BPM si ha $BM = \sqrt{(BP^2 + PM^2)} = \sqrt{\left[(u-c)^2 + t^2\right]} = \sqrt{(u^2 - 2cu + c^2 + t^2)}$. Supposto dunque essere $AM : MB :: g : h$, sarà $\sqrt{(u^2 + t^2)} : \sqrt{(u^2 - 2cu + c^2 + t^2)} :: g : h$; dunque $h\sqrt{(u^2 + t^2)} = g\sqrt{(u^2 - 2cu + c^2 + t^2)}$, e quadrando, si ottiene $h^2 u^2 + h^2 t^2 = g^2 u^2 - 2g^2 cu + g^2 c^2 + g^2 t^2$, o sia $(g^2 - h^2) u^2 + (g^2 - h^2) t^2 - 2g^2 cu + g^2 c^2 = 0$; equazione, che (384) appartiene al cerchio, perchè i due quadrati t^2, ed u^2 trovansi nello stesso membro, collo stesso segno, e collo stesso coefficiente.

Per ricondurre quest' equazione alla forma $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$ (369) vedesi, che non essendovi secondo termine in rapporto a t, basta per riguardo a questa indeterminata di supporre $t = y$, avendosi così $(g^2 - h^2) u^2 + (g^2 - h^2) y^2 - 2g^2 cu + g^2 c^2 = 0$; bisogna dunque ora eliminare il secondo termine per rapporto ad u; e come il prodotto ut non giace nell'equazione, così basta (388) impiegar la regola data (378). Si libera dunque u^2, e si ha $u^2 - \frac{2g^2 cu}{g^2 - h^2} = -\frac{g^2 c^2}{g^2 - h^2} - y^2$;

si pone $u - \frac{g^2 c}{g^2 - h^2} = x$; quadrando, e sostituendo in vece del primo membro $u^2 - \frac{2g^2 cu}{g^2 - h^2}$, il suo valore $x^2 - \frac{g^4 c^2}{(g^2 - h^2)^2}$, che risulterà da tale operazione, si avrà $x^2 - \frac{g^4 c^2}{(g^2 - h^2)^2} = - \frac{g^2 c^2}{g^2 - h^2} - y^2$, o pure $y^2 = \frac{h^2 g^2 c^2}{(g^2 - h^2)^2} - x^2$, equazione, che paragonata all' altra $y^2 = \frac{1}{4} a^2 - x^2$, ne dà $\frac{1}{4} a^2 = \frac{h^2 g^2 c^2}{(g^2 - h^2)^2}$, per cui è il raggio $\frac{1}{2} a = \frac{h g c}{g^2 - h^2}$
Dunque riman solo di determinare il centro che dev' essere sopra di ABP, perchè sia ha $t = y$. Or l' equazione $u - \frac{g^2 c}{g^2 - h^2} = x$, che si è impiegata per ridurre, dinota, che per avere x, bisogna diminuire u della grandezza $\frac{g^2 c}{g^2 - h^2}$; per cui prendendo $AC = \frac{g^2 c}{g^2 - h^2}$, si avrà $CP = AP - AC = u - \frac{g^2 c}{g^2 - h^2} = x$; così col centro C, e col raggio $= \frac{h g c}{g^2 - h^2}$ si descriverà un cerchio, ciascun punto della periferia del quale, avrà la proprietà di cui trattasi.

Del resto, il centro, e 'l raggio possonsi trovar di una maniera molto semplice, per mezzo della prima equazione $u^2 - \frac{2 g^2 cu}{g^2 - h^2} = - \frac{g^2 c^2}{g^2 - h^2} - y^2$; perchè

essendo il centro su di AP, come già si è osservato, se si fa $y = 0$, nel risolvere l'equazione, la qual si riduce ad $u^2 - \frac{2g^2 cu}{g^2 - h^2} = - \frac{g^2 c^2}{g^2 - h^2}$, si avranno i due valori di u, i quali esprimono le distanze AD, AE alle quali il cerchio DME incontra la retta AB; dunque di tal cerchio sarà noto il diametro DE, che si avrà nella differenza delle ora determinate AE, AD, per cui C punto medio di DE ne sarà il centro, e CE il raggio. Ma se si risolve l'equazione $u^2 - \frac{2g^2 cu}{g^2 - h^2} = - \frac{g^2 c^2}{g^2 - h^2}$, si ha $u = \frac{g^2 c}{g^2 - h^2} \pm \sqrt{\frac{g^2 h^2 c^2}{(g^2 - h^2)^2}} = \frac{g^2 c \pm ghc}{g^2 - h^2} = \frac{gc(g \pm h)}{(g - h)(g + h)}$, da cui si hanno questi due valori $u = \frac{gc}{g + h} = AD$, ed $u = \frac{gc}{g - h} = AE$.

394. Si prenderà per secondo problema questo; *Trovar fuori di una data retta* AR (fig. 58) *tutt' i differenti punti* M *tali, che tirando da essi, ai due estremi* A *ed* R *di quella le congiungenti* MA, MR, *l'angolo* AMR *sia sempre uguale ad un angolo dato.*

Chiaminsi r il raggio delle tavole, ed m la tangente dell' angolo dato, al qual dev' essere uguale AMR; ed abbassata la perpendicolare MP, ponghansi $AP = u$, $PM = t$, $AR = b$, sarà quindi $PR = AR - AP = b - u$.

Si ricordino queste tre proposizioni dimostrate (*Geom.* 284, 285, e 278), cioè che se A e B sono due an-

goli, si ha

$$1.^{\circ}\ \text{sen.}\ (A+B) = \frac{\text{sen.}\ A\ \text{cos.}\ B + \text{sen.}\ B\ \text{cos.}\ A}{r};$$

$$2.^{\circ}\ \text{cos.}\ (A+B) = \frac{\text{cos.}\ A\ \text{cos}\ B - \text{sen.}\ A\ \text{sen.}\ B}{r};$$

$$3.^{\circ}\ \text{tang.}\ (A+B) = \frac{r\ \text{sen.}\ (A+B)}{\text{cos.}\ (A+B)}.$$

Ciò posto, dai due triangoli rettangoli APM, RPM si ha (*Geom.* 295) $AM : AP :: r :$ sen. AMP; $AM : PM :: r :$ sen. MAP, o sia cos. AMP; $RM : RP :: r :$ sen. RMP; $RM : PM :: r :$ sen. MRP, o sia cos. RMP; da cui si deducono sen. $AMP = \frac{r \times AP}{AM}$; cos. $AMP = \frac{r \times PM}{AM}$; sen. $RMP = \frac{r \times RP}{RM}$; cos. $RMP = \frac{r \times PM}{RM}$. Dunque poichè $AMR = AMP + RMP$, perciò per le rammentate formole, ed indi per le convenienti sostituzioni, si avranno

$$\text{sen.}\ AMR = \frac{\text{sen.}\ AMP\ \text{cos.}\ RMP + \text{sen.}\ RMP\ \text{cos.}\ AMP}{r}$$

$$= \frac{r \times AP \times PM + r \times RP \times PM}{AM \times RM} = \frac{r \times AR \times PM}{AM \times RM};$$

$$\text{cos.}\ AMR = \frac{\text{cos.}\ AMP\ \text{cos.}\ RMP - \text{sen.}\ AMP\ \text{sen.}\ RMP}{r}$$

$$= \frac{r \times PM^2 - r \times AP \times RP}{AM \times RM};$$

$$\text{tang.}\ AMR = \frac{r\ \text{sen.}\ AMR}{\text{cos.}\ AMR} = \frac{r \times AR \times PM}{PM^2 - AP \times RP};\ \text{e}$$

sostituendo gli algebrici valori, e riducendo, si ha $m = \frac{rbt}{t^2 - bu + u^2}$, o sia $mt^2 + mu^2 - mbu - rbt = 0$, equazione al cerchio (384), come appunto attender si doveva.

Per determinare il centro e 'l raggio, bisogna ricondurre tale equazione alla forma $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$. A tal uopo si libera t^2, e si ha $t^2 - \frac{rb}{m}t - bu + u^2 = 0$; si fa (378) $t - \frac{rb}{2m} = y$, ed oprando a norma del citato articolo, la suddetta equazione si cambia in $y^2 - \frac{r^2b^2}{4m^2} - bu + u^2 = 0$. Riman dunque ad eliminare il secondo termine in riguardo ad u; e poichè il prodotto ut non prende parte nell' equazione, perciò (388) si fa semplicemente $u - \frac{b}{2} = x$, ed oprando similmente, l' equazione diviene $y^2 - \frac{r^2b^2}{4m^2} + x^2 - \frac{b^2}{4} = 0$, o sia $y^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{r^2b^2}{4m^2} - x^2$, la qual paragonata coll' equazione $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$, si ottiene $\frac{1}{4}a^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{r^2b^2}{4m^2}$ e quindi il raggio $\frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{r^2b^2}{4m^2}\right)}$.

Per trovare il centro, e determinar nello stesso tempo questo raggio, l' equazione $t - \frac{rb}{2m} = y$ dinota, che se si mena AB parallela a PM, cioè, che se si eleva

dal punto A su di AR la perpendicolare $AB = \frac{rb}{2m}$, e si tira BCQ parallela ad AR, le rette QM saranno le y, perchè $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{rb}{2m} = y$. Ma l' equazione $u - \frac{b}{2} = x$ fa conoscere, che se su di AR si prende la parte $AG = \frac{b}{2}$, sarà $GP = x$, perchè $GP = AP - AG = u - \frac{b}{2} = x$; dunque se per G si tira GC parallela a PM, il punto C sarà il centro. Da altra parte, se si unisce AC, per l'angolo retto in G, si avrà $AC = \sqrt{(AG^2 + GC^2)} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{r^2 b^2}{4m^2}\right)}$; cioè AC sarà il raggio.

Dunque questa costruzione si riduce ad elevar su di AR, dal suo punto medio G, la perpendicolare $GC = \frac{rb}{2m}$, ed a descrivere un cerchio col centro C, e col raggio CA: ogni angolo MAR, che avrà il suo vertice alla circonferenza di tal cerchio, ed i cui lati passeranno per i punti A ed R, sarà uguale all' angolo dato. Ora per costruir la grandezza $\frac{rb}{2m}$, devesi menar la retta AO, che faccia con AB l'angolo BAO uguale all' angolo dato, essa segherà GC nel chiesto punto C; perchè nel triangolo rettangolo ABC essendo r : tan. BAC :: AB : BC o sia AG; cioè $r : m :: AB : \frac{1}{2} b$, sarà $GC = AB = \frac{rb}{2m}$.

Si può facilmente vedere, che tutto si riduce a condurre pel punto A la retta AO, che faccia con AR l'angolo RAO uguale al complementò dell'angolo dato: questa retta taglierà in C la perpendicolare elevata su di AR, dal suo punto medio G; in modo che C sarà il centro, e CA il raggio.

395. Da ciò è facile di risolvere il seguente problema: *Dati i tre punti* R, A, *ed* R' (fig. 55), *e due angoli che chiaminsi* P, *e* Q; *ritrovare un punto* M, *dal quale condotto ai tre punti dati* R, A, *ed* R' *le rispettive* MR, MA, *ed* MR', *queste faccian tra esse gli angoli* RMA, R'MA, *uguali rispettivamente ai dati* P, *e* Q.

Dai punti medj G, e G' delle AR, AR' si elevin su di esse le rispettive perpendicolari GC, $G'C'$; dal punto A si tirino le CA, $C'A$; che facciano colle rispettive AR, AR' gli angoli CAR, $C'AR'$ uguali rispettivamente ai complementi degli angoli dati P, e Q, le quali CA, $C'A$ incontrino le CG, $C'G'$ nei rispettivi punti C, C'. Coi centri C, C' e coi rispettivi raggi CA, $C'A$ descrivansi due cerchi, che segheransi in A ed M; il punto M sarà il richiesto. In fatti, pel triangolo rettangolo AGC si ha GAC per complemento di GCA, dunque GCA per l'eseguita costruzione è uguale a P; ma GCA è metà di RCA, e pel cerchio $MR'A$ è pure RMA metà di RCA, dunque $RMA = GCA = P$. Similmente si dimostra essere $R'MA = Q$.

Questo problema serve a determinare sulla carta d'un paese la posizione di un punto, dal quale sonosi rilevati tre oggetti conosciuti.

Se gli angoli RMA, $R'MA$ fossero uguali agli angoli

$RR'A$, ed $R'RA$, allora il problema sarebbe indeterminato, i due cerchi si confonderebbero, e ciascun punto della circonferenza di essi soddisferebbe al quesito.

396. Per terzo problema si tratterà di trovar la curva, o le curve, che avranno la seguente proprietà: cioè, che *essendo* AZ, AT, *due rette che comprendono un angolo dato, debbonsi trovar le curve, la distanza* MF *di ciascun punto* M *delle quali da un punto* F *dato in* AZ; *sia alla distanza* MT *dello stesso punto* M, *dalla retta* AT, (*qual distanza sia presa parallelamente ad* AZ), *sempre in una stessa ragione.*

Da un qualunque punto M di questa curva, la qual si supponga di già trovata, si tirino la MP parallela ad AT, e la MS perpendicolare ad AZ; sarà dato l'angolo MPS, onde son dati il suo seno, e 'l coseno, i quali si chiamino rispettivamente p, e q, ed r chiamisi il raggio delle tavole (*); e finalmente pongansi $AP = u$, $PM = t$, la data $AF = c$, e la data ragione si esprima per quella di $g : h$.

Ciò posto, nel triangolo rettangolo MPS si ha (*Geom.* 295) $r :$ sen. $MPS :: MP : MS$, ed $r :$ sen. PMS, o sia cos. $MPS :: PM : PS$; cioè $r : p :: t : MS = \frac{pt}{r}$, ed $r : q :: t : PS = \frac{qt}{r}$. Dunque $SF = SP$

(*) Si può supporre, come si fa qui, che le grandezze p, q, r son date per le Trigonometriche Tavole; ma però possonsi determinare con una semplice costruzione, facendo un triangolo rettangolo, che abbia uno dei suoi angoli acuti uguale all'angolo dato MPS, ed una qualunque ipotenusa. Prendendo questa per r, gli altri due lati saranno p, e q.

$- PF = SP - PA + AF = \frac{qt}{r} - u + c$; ora il triangolo rettangolo MSF esibisce $MF = \sqrt{(MS^2 + SF^2)}$; dunque MF = ...

$$\sqrt{\left(\frac{p^2 t^2}{r^2} + \frac{q^2 t^2}{r^2} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + c^2\right)};$$

ma perchè (*Geom.* 281) $p^2 + q^2 = r^2$, perciò si avrà

$$MF = \sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + c^2\right)};$$

e poichè dev'essere MF ad MT, o sia AP, nella data ragione, di $g : h$, perciò........................

$$\sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + c^2\right)} : u :: g : h,$$

e per conseguenza..............................

$$gu = h\sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + c^2\right)};$$

e quadrando, ed indi trasponendo, sarà $h^2 t^2 - \frac{2h^2 qut}{r} + (h^2 - g^2) u^2 + \frac{2ch^2 qt}{r} - 2ch^2 u + h^2 c^2 = 0$, equazione che riguarda le sezioni coniche (380), e che (392) apparterrà all'ellisse, se il quadrato di $-\frac{2qh^2}{r}$, toltone il quadruplo di h^2 moltiplicato per $h^2 - g^2$ è negativo; cioè se $\frac{4q^2 h^4}{r^2} - 4h^4 + 4h^2 g^2$, o sia se $\frac{4q^2 h^4 - 4r^2 h^4 + 4r^2 h^2 g^2}{r^2}$ è negativo; o pure (perchè $r^2 - q^2 = p^2$), se $\frac{4r^2 h^2 g^2 - 4p^2 h^4}{r^2}$ è negativo:

al contrario, essa apparterrà all'iperbole, se $\frac{4r^2h^2g^2-4p^2h^4}{r^2}$ è positivo. Essa riguarderà la parabola, se $\frac{4r^2h^2g^2-4p^2h^4}{r^2}$ è zero, cioè se $4r^2h^2g^2=4p^2h^4$, o se $rg=ph$. Finalmente la curva sarà un cerchio, se $h^2=h^2-g^2$, lo che potrà solo accadere quando, o g sarà zero, o pure h infinita, perchè in quest' ultimo caso devesi trascurare g^2 in riguardo ad h^2.

Se or si vuol costruire la curva in ciascuno di questi casi, devesi imitare ciò che si è fatto (380, *e seguenti*); e come allora si è oprato sull'ellisse, così per far vedere la similitudine delle operazioni, e delle costruzioni relativamente a queste due curve, quì si va ad applicare all' iperbole ciò che si è fatto nello stesso citato luogo, cioè si cerca di ricondurre l'ottenuta equazione, alla forma $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-\frac{1}{4}a^2\right)$.

Dunque nell'ottenuta equazione si libera t^2, e si ha $t^2+\left(\frac{2cq}{r}-\frac{2qu}{r}\right)t+\left(1-\frac{g^2}{h^2}\right)u^2-2cu+c^2=0$. Per eliminare il secondo termine in ordine at, si fa $t+\frac{cq}{r}-\frac{qu}{r}=y$, da cui quadrando, ed indi trasponendo, risulta $t^2+\left(\frac{2cq}{r}-\frac{2qu}{r}\right)t=y^2-\frac{c^2q^2}{r^2}+\frac{2cq^2u}{r^2}-\frac{q^2u^2}{r^2}$, e quindi sostituendo, $y^2-\frac{c^2q^2}{r^2}+\frac{2cq^2u}{r^2}-\frac{q^2u^2}{r^2}+\left(1-\frac{g^2}{h^2}\right)u^2-2cu+c^2=0$.

Bisogna dunque eliminare il secondo termine per rapporto ad u, ma prima si osservi, che i termini $-\frac{q^2u^2}{r^2}$ $+\left(1-\frac{g^2}{h^2}\right)u^2$, o sia $-\frac{q^2u^2}{r^2}+u^2-\frac{g^2u^2}{h^2}$, o pure $\frac{r^2u^2-q^2u^2}{r^2}-\frac{g^2u^2}{h^2}$, riduconsi a $\frac{p^2u^2}{r^2}-\frac{g^2u^2}{h^2}$; e gli altri due termini $\frac{2cq^2u}{r^2}-2cu$, o sia $\frac{2cq^2u-2cr^2u}{r^2}$, riduconsi a $-\frac{2cp^2u}{r^2}$: similmente i due termini $-\frac{c^2q^2}{r^2}$ $+c^2$, riduconsi a $\frac{c^2p^2}{r^2}$, e tutto ciò perchè r^2-q^2 $=p^2$. Dunque l'equazione si cambia in $y^2+\frac{c^2p^2}{r^2}$ $-\frac{2cq^2u}{r^2}+\frac{p^2u^2}{r^2}-\frac{g^2u^2}{h^2}=0$, o pur togliendo i denominatori, e ponendo indi per brevità $p^2h^2-r^2g^2$ $=r^2k^2$, riducesi essa ad $r^2h^2y^2+c^2h^2p^2-2ch^2p^2u$ $+r^2k^2u^2=0$.

Si liberi dunque u^2, e si ha $u^2-\frac{2ch^2p^2}{r^2k^2}u+\frac{h^2}{k^2}y^2$ $+\frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2}=0$; e si ponga $u-\frac{ch^2p^2}{r^2k^2}=\frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, coll' introdurre l' incognita n, perchè il prodotto ut si trova nell' equazione primitiva (380). Allora oprando come di sopra, dopo fatte le sostituzioni, si avrà $\frac{c^2h^4p^4x^2}{r^4k^4n^2}-\frac{c^2h^4p^4}{r^4k^4}+\frac{h^2}{k^2}y^2+\frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2}=0$; e soppriméndo il comun fattore $\frac{h^2}{k^2}$, e lasciando in un mem-

bro la sola y^2, ne risulta $y^2 = -\frac{c^2 h^2 r^2 x^2}{r^4 k^2 n^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2}$ $+ \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2} = - \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2 n^2}\left(x^2 + \frac{r^2 z^2 k^2}{p^2 h^2} - n^2\right)$, quale ultimo valore di y^2 si ottiene dividendo il secondo membro pel coefficiente di x^2, e nello stesso tempo indicando la moltiplicazione pel medesimo coefficiente; e come trattasi dell' iperbole, così bisogna osservare che la grandezza $r^2 k^2$, ch' è la stessa di $p^2 h^2 - r^2 g^2$, è negativa; perchè secondo ciò che quì sopra si è veduto, dev' esser positiva la quantità $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$, o sia questa $\frac{4h^2}{r^2}(r^2 g^2 - p^2 h^2)$, affinchè la curva sia un' iperbole. Così bisogna render k^2 negativa, badando quando si vuol introdurre il suo valore nell'equazione, di sostituire per essa, la grandezza $r^2 g^2 - p^2 h^2$, in vece di $p^2 h^2 - r^2 g^2$; dunque l' equazione diviene $y^2 = \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2 n^2}\left(x^2 - \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 h^2} - n^2\right)$. Paragonando questa, coll'altra $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - \frac{1}{4}a^2\right)$, affin di determinare i diametri conjugati, si avrà $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2h^2p^4}{r^4 k^2 n^2}$, ed $\frac{1}{4}n^2 = \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 h^2} + n^2$, da cui facilmente si rileveranno a, e b, cioè i due diametri conjugati, che or si va a vedere essere i due assi medesimi dell' iperbole.

Si determini dunque la posizione dei diametri conjugati, ai quali si riferisce la ridotta equazione. Conformemente a ciò che si è fatto (382), bisogna costruir le

due equazioni $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, ed $u - \frac{c h^2 p^2}{r^2 k^2}$ $= \frac{ch^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$; ma come si è osservato che k^2 è negativa, perchè si è nel caso dell' iperbole, così bisogna cambiar quest' ultima equazione in $u + \frac{ch^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{ch^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$, ove non cambiasi il segno del termine affetto dalla x, benchè in questo vi ha luogo k^2, perchè la grandezza n può prendersi arbitrariamente positiva o negativa. Dunque per continuare ad imitare ciò che si è fatto nello stesso citato luogo, bisogna per A menare parallelamente a PM la retta $AB = \frac{cq}{r}$, e conducendo per B la BI parallela ad AZ, prender sul suo prolungamento, ad arbitrio la parte BK, e per K distendere KL parallela a PM, e tale che stia $BK : KL :: r : q$; allora se unisconsi i punti B, ed L colla LB, la quale incontra le rette PM in Q, le rette QM saran le y. Perchè per i triangoli simili BKL, e BQI avendosi $BK : KL ::$ BI, o sia $AP : QI$, cioè $r : q :: u : QI = \frac{qu}{r}$, sarà ogni $QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t$ $- \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y$.

Ma si può abbreviar questa costruzione menando dal punto F la FB perpendicolare a TA, perchè è evidente che l' angolo FAB è uguale ad APM, da cui nel triangolo rettangolo ABF si ha $r : q :: c : AB$ $= \frac{qc}{r}$; così poichè QM è parallela ad AB, perciò

le y son perpendicolari a BQ, per cui BQ è la posizione di un degli assi, l'altro dei quali è quindi parallelo a QM.

Dunque riman solo a determinare il centro, o sia l'origine delle ascisse x; a quale oggetto bisogna considerar l'equazione, in cui è x, cioè la seconda equazione $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, nella quale supponendo $x = o$, essa si ridurrà ad $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = o$, onde sarà $u = -\frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$; ed in conseguenza per aversi il centro della curva, cioè $x = o$, la y corrispondente a questa $x = o$ deve procedere dall'estremo di una delle u, la qual sia $= -\frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$; onde convien prendere dal punto A sulla direzione di AB; ma all'opposto delle u, la $AG = \frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$, e dall'estremo G di AG menare GC parallela a PM, o sia perpendicolare a BQ, il punto C ove GC incontra BQ, sarà il centro.

In un simile modo si procederà per l'ellisse.

Per riguardo alla parabola, poichè in questo caso si ha $rg = ph$, come si è veduto di sopra, perciò l'equazione che si è avuta in y ed u, dopo l'eliminazione del secondo termine per rapporto a t, e dopo di aver introdotto per $r^2 - q^2$ il suo valore p^2, ed indi nel valor di k^2 sostituendo, in vece di g, il suo valore $\frac{ph}{r}$ ottenuto da $rg = ph$; diviene $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2}$

$= 0$, o sia $y^2 = \frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2}$, la quale per ridursi alla forma solita riguardante la parabola, si supporrà (386) $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, e si avrà $y^2 = nx$; ed essendosi costruita, come nel caso precedente, l'equazione $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, che si è ottenuta per l'eliminazione del secondo termine per rapporto a t; si costruirà l'equazione $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, in un modo analogo a quello usato (386); cioè si libererà u, e si avrà $u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2nx}{2cp^2}$, per cui si prenderà su di AP la parte $AG = \frac{1}{2}c$, e dal suo estremo G si menerà GC parallela a PM, C sarà l'origine delle ascisse x, che saran CQ, in modo che CQ sarà la posizione del diametro, il cui vertice sarà C, e 'l cui parametro n si determinerà come segue, cioè poichè $AG = \frac{1}{2}c$, perciò $GP = AP - AG = u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2nx}{2cp^2} = \frac{r^2n}{2cp^2} \times CQ$, ed $n = \frac{2cp^2 \times GP}{r^2 \times CQ}$. Or le parallele PQ, CG, ed AB offrono $CQ : GP :: CF : GF :: BF : AF$, cioè $CQ : GP :: BF : c$, dunque $GP = \frac{c \times CQ}{BF}$; onde sostituendo un tal valore di GP, in quello di n, si avrà $n = \frac{2c^2p^2}{r^2 \times BF}$ grandezza cognita, perchè, c,

p, r son tutte date, e BF è cognita dalla costruzione. Ma questo valore di n si può render più semplice osservando, che dal triangolo rettangolo FAB si ha $r : p ::$ $AF : BF :: c : BF = \frac{cp}{r}$, per cui sarà $n = \frac{2c^2p^2}{r^2 \times BF}$ $= \frac{c^2p^2}{r^2} \times \frac{2}{BF} = BF^2 \times \frac{2}{BF} = 2BF$.

397. Trattisi ora di *trovare* (fig. 62) *la curva, che descriverà un dato punto* M *della data retta* OH, *o del suo prolungamento, se si facciano scorrere i suoi estremi* O, *ed* H, *lungo i due lati* CO, *e* CH *del dato angolo* OCH.

Suppongasi esservi la curva, e da un qualunque punto M di essa si menino MP parallela a CH, ed MN perpendicolare a CO; si pongano $CP = u$, $PM = t$, e le date MO, MH rispettivamente uguali a g, ed h; e poichè l'angolo OCH, o il suo uguale OPM è dato, il suo supplemento MPN è pure dato; dunque si chiamino p il seno, e q il coseno di quest'ultimo, e si esprima per r il raggio delle tavole.

Ciò stabilito, il triangolo rettangolo PNM offre $r : p :: t : MN$, ed $r : q :: t : PN$; dunque $MN = \frac{pt}{r}$, e $PN = \frac{qt}{r}$. Di più per le parallele CH, e PM si ha $MH : CP :: MO : PO$, cioè $h : u :: g : PO = \frac{gu}{h}$; dunque $NO = \frac{qt}{r} + \frac{gu}{h}$. Ed in oltre il triangolo rettangolo MNO offre $MN^2 + NO^2 = MO^2$, cioè $\frac{p^2t^2}{r^2}$

$+\frac{q^2 t^2}{r^2}+\frac{2gqut}{rh}+\frac{g^2u^2}{h^2}=g^2$, dunque essendo $p^2tq^2 = r^2$, si avrà semplicemente $t^2+\frac{2gqut}{rh}+\frac{g^2u^2}{h^2}=g^2$, equazione all' ellisse (381).

Per ricondurre tale equazione alla forma $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2-x^2\right)$ colle condizioni menzionate (370), bisogna da principio eliminare il secondo termine per rapporto a t, per cui si pone $t+\frac{gqu}{rh}=y$; quadrando, ed indi sostituendo per $t^2+\frac{2gqut}{rh}$, il valore che risulterà da questa operazione, si avrà $y^2-\frac{g^2q^2u^2}{r^2h^2}+\frac{g^2u^2}{h^2}=g^2$; ma sono i due termini $-\frac{g^2\ q^2\ u^2}{r^2\ h^2}+\frac{g^2\ u^2}{h^2}=\frac{g^2r^2u^2-g^2q^2u^2}{r^2\ h^2}=\frac{g^2p^2\ u^2}{r^2\ h^2}$, per essere $r^2-q^2=p^2$ dunque sostituendo si ha $y^2+\frac{g^2p^2u^2}{r^2\ h^2}=g^2$. Ora benchè in questa equazione non vi è secondo termine per riguardo ad u, pure (389) come il termine ut si è trovato nella primitiva equazione, così si fa una trasformazione per u, ponendo $u=\frac{lx}{n}$; e si ha $y^2+\frac{g^2p^2l^2x^2}{r^2\ h^2\ n^2}=g^2$, e quindi $y^2=g^2-\frac{g^2p^2l^2x^2}{r^2\ h^2\ n^2}$, o pur dividendo il secondo membro pel coefficiente di x^2, e nello stesso tempo indicando la moltiplicazione per questo stesso

coefficiente, si avrà $y^2 = \frac{g^2p^2l^2}{r^2h^2n^2}\left(\frac{r^2h^2n^2}{p^2l^2} - x^2\right)$. Ma come si ha bisogno di una sola indeterminata n, così si può assegnare ad l un arbitrario valore, e per rendere il calcolo più semplice, si supporrà $l = r$, lo che ridurrà l'equazione ad $y^2 = \frac{g^2p^2}{h^2n^2}\left(\frac{h^2n^2}{p^2} - x^2\right)$. Per determinare l'ellisse, si cerca prima la magnitudine dei diametri conjugati, col paragonare all'equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - x^2\right)$; da qual paragone si ha $\frac{b^2}{a^2} = \frac{g^2p^2}{h^2n^2}$, ed $\frac{1}{4}a^2 = \frac{h^2n^2}{p^2}$, e quindi $a = \frac{2hn}{p}$, e $b = 2g$.

Per determinarne poi la posizione, ed il valore di n, si costruiranno le due equazioni $t + \frac{gqu}{rh} = y$, ed $u = \frac{lx}{n} = \frac{rx}{n}$. Per la prima, se prendesi ad arbitrio CK, e che indi si mena KL parallela a PM, e tale che $CK : KL :: rh : gq$, le rette QM computate dopo l'incontro delle rette PM, colla CL, saranno le y; in fatti, i triangoli simili CKL, e CPQ esibiscono $CK : KL :: CP : PQ$, cioè $rh : gq :: u : PQ = \frac{gqu}{rh}$; dunque

$$QM = PM + PQ = t + \frac{gqu}{rh} = y.$$

Essendo le y dinotate dalle rette QM, bisogna dunque che le x sien computate su di CQ, e per averne l'origine, devesi ricorrere all'equazione $u = \frac{rx}{n}$, la qual

supponendo $x = o$, riducesi ad $u = o$; cioè la x è uguale a zero, o sia l'origine delle x si ha ove $u = o$, vale a dire nel punto C; quindi C è il centro, e CQ, CH sono le posizioni dei due diametri conjugati. In quanto al valor di u, l'equazione $u = \frac{rx}{n}$, o sia $OP = \frac{r \times CQ}{n}$, offre $n = \frac{r \times CQ}{CP}$; e perchè da $CP : CQ :: CK : CL$, si ha $\frac{CQ}{CP} = \frac{CL}{CK}$, perciò $n = \frac{r \times CL}{CK}$; di più essendo CK arbitraria, essa si può supporre $= r$, dunque si ha $n = CL$, per cui si ha tutto ciò che occorre per descrivere l' ellisse (316).

Applicazione dei stessi principi, al risolvimento di alcuni problemi determinati.

398. Dopo di aver risoluto il secondo problema indeterminato, che si è proposto (394), se n' è fatto uso per risolvere un problema determinato. Questo tacitamente si è considerato contenerne due altri, ambi indeterminati, dei quali essendo ciascuno della stessa specie del primo, ciascuno si è risoluto nello stesso modo. L'intersezione delle due curve, o cerchi, che erano il *luogo* di ciascuno di questi due parziali problemi, ha dato il risolvimento del problema determinato. Quando l'equazione finale, che esprime le condizioni di un problema, sorpassa il secondo grado, per risolvere un tal problema si procede in un modo simile. Nei casi ove si potrà impiegare una sola incognita, se ne impiegheranno due,

e si cercherà dalle condizioni del problema, di stabilir due equazioni, le quali separatamente costruite, ciascuna di esse esibisce una curva, della quale ciascun punto soddisfa alla sua rispettiva equazione: se il problema è possibile, le due curve s'intersecheranno in uno, o più punti, secondochè il problema ammetterà una, o più soluzioni; secondochè esso contiene uno, o più casi dipendenti dagli stessi dati, e dagli stessi ragionamenti. Queste intersezioni esibiscono le differenti soluzioni del problema. Fino a tanto che le due equazioni a due indeterminate non sorpassano il secondo grado, vedesi dunque che il risolvimento dipenderà dall'intersezione di due curve coniche, tutto al più. In vece, che nei stessi casi, se s'impiegherà una sola incognita, o pure se per mezzo delle due trovate equazioni, si elimini una delle due incognite, l'equazione finale monterà al terzo, e più sovente al quarto grado. Ma se una delle due equazioni, o ambedue sorpassano il secondo grado, allor la soluzione dipende dall'intersezione di curve più elevate delle sezioni coniche.

Veggansi in prima alcuni esempj di problemi, che non passino il quarto grado.

399. Proponesi per primo problema *di trovar due medie continuatamente proporzionali, tra due rette date* a, e b.

Chiamando t, ed u queste due medie proporzionali, si avrà la progressione $\div\div a : t : u : b$, che esibisce queste due proporzioni $a : t :: t : u$, e $t : u :: u : b$, e quindi queste due equazioni $au = t^2$, e $bt = u^2$, ambe le quali riferisconsi direttamente alla parabola. Per cui se tiransi due rette indefinite (*fig.* 63) AZ, AX, che

contengono un qualunque angolo, il quale per più semplicità sia retto; e se su di una di esse AZ come diametro, di cui A sia il vertice, ed a il parametro, ed XAZ l'angolo delle coordinate, descrivasi (367) una parabola, questa sarà il luogo dell'equazione $au = t^2$, in modo che se le AP rappresentano u, le PM rappresenteran t. Similmente, se col diametro AX, di cui A il vertice, b il parametro, ed XAZ l'angolo delle coordinate, descrivasi un'altra parabola, questa sarà il luogo dell'altra equazione $bt = u^2$, in modo che se le AP sono le t, le $P'M'$ saranno le u. Ma affinchè il problema sia risoluto, bisogna che le due equazioni $au = t^2$, e $bt = u^2$, abbian luogo nello stesso tempo; cioè, che il valore di u nell'una, sia lo stesso che il valore di u nell'altra, e che lo stesso accada per t; ora ciò si avvera nel punto M ove intersecansi le due parabole, come è chiaro, perchè essendo le u computate su di AZ, e le t su di AX, o pur parallelamente ad AX, ne deriva che se tiransi MP, ed MP rispettivamente parallele ad AX, ed AZ, il valore MP di u nella parabola AMM', è lo stesso che il valore AP di u nell'altra parabola AMM; similmente il valore AP di t nella parabola AMM', è lo stesso che il valore PM di t nell'altra parabola AMM; ed è evidente, che nel solo punto M, ove intersecansi le due parabole, i valori di u, e t son comuni ad esse; poichè nell'altro punto A ove le stesse anche s'intersegano, sebbene u, e t le sien pure comuni, però u, e t sono ivi zero, per cui tal punto A non soddisfa al problema, avendosi così per i valori di u, e t le sole AP, e PM corrispondenti al punto M d'intersezione.

400. Del rimanente, benchè possa sempre pervenirsi alla soluzione, costruendo separatamente le equazioni che trovansi, delle volte preparando tali equazioni, possonsi ottenere delle costruzioni più semplici; per esempio, se sommansi le due equazioni $au = t^2$, e $bt = u^2$, si avrà $au + bt = u^2 + t^2$, equazione al cerchio, se le u, e le t saran prese su di rette perpendicolari tra esse. Ora benchè la parabola si costruisce facilmente, pure più facilmente il cerchio; per cui nel presente caso si preferirà di costruir l'equazione $au = t^2$ solamente come quì sopra, e poi in vece di costruir del pari l'altra equazione $bt = u^2$, si costruirà l'equazione al cerchio $au + bt = u^2 + t^2$, col cambiarla in quest' altra $y^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2 - x^2$ per mezzo dell' eliminazione dei secondi termini in riguardo a t, ed u, col porre $t - \frac{1}{2} b = y$, ed $u - \frac{1}{2} a = x$. Allor prendendo $AB = \frac{1}{2} b$, e menando BQ parallela ad AP, si avranno le QM per i valori di y. Prendendo poi $AO = \frac{1}{2} a$, e menando OC parallela ad AX, si avranno le linee CQ per i valori di x; per cui col centro C, e col raggio $\sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)} = AC$, si descriverà un cerchio, il quale tagliando la parabola AM in M, esibirà MP, ed AP per i valori di t, ed u.

401. Possonsi variar molto queste costruzioni; si posson, per esempio, sommar le due equazioni, e poi mol-

tiplicare per una grandezza arbitraria $\frac{l}{n}$ positiva, o negativa, da cui si ha $au + \frac{l}{n}\,bt = t^2 + \frac{l}{n}\,u^2$, equazione che può appartenere all'ellisse, o all'iperbole, in corrispondenza del valore che si darà ad $\frac{l}{n}$; in modo che si può costruire coll'una, o l'altra di tali curve, come si è fatto col cerchio. Si può similmente costruir coll'una, e coll'altra, come si è fatto colle due parabole; o pur con una di esse combinata con un cerchio, lo che si ha dando ad $\frac{l}{n}$ convenevoli valori, e che facilmente si determinano in seguito di ciò ch'è stato detto (392).

402. Si propone per secondo problema *di dividere in tre parti uguali un dato angolo, o arco.*

Sia EO (*fig.* 64) l'arco dato, di cui A il centro; suppongasi esserne EM il suo terzo, e si tirino i raggi EA, MA, e le perpendicolari MP, OR. Le OR, ed AR, che son date per essere il seno, e 'l coseno del dato arco EO, chiaminsi rispettivamente d, e c, e 'l raggio AE pongasi $= r$; e finalmente chiaminsi u, e t le incognite AP, e PM.

Ciò posto, dal triangolo rettangolo APM si ha $u^2 + t^2 = r^2$, e dai triangoli simili APM, ARS ne risulta $AP : PM :: AR : RS$, cioè $u : t :: c : RS = \frac{ct}{u}$. Or se si prolunga la perpendicolare MP fino alla periferia in V, sarà l'arco MV uguale all'altra MO, perchè ciascuno è duplo di ME; dunque l'angolo $OMS = AMP$

$= ASR = OSM$, a cagion delle parallele. Quindi è isoscele il triangolo SOM, per cui $OS = OM = MV = 2t$; sicchè essendo $OR = OS + SR$, sarà $d = 2t + \frac{ct}{u}$, o sia $2tu + ct = du$, o pure $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$.

Dunque le due equazioni a costruire sono $u^2 + t^2 = r^2$, o sia $t^2 = r^2 - u^2$, e $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$, la prima delle quali trovasi già costrutta, perchè è la stessa equazione del cerchio EMO.

In quanto alla seconda, essa riguarda l'iperbole (391); e come vi mancano i due quadrati, così, uniformandosi a quel che si è detto nello stesso citato luogo, bisogna passare in un membro tutt' i termini affetti dalla u, da cui si ha $tu - \frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}ct$, o sia $\frac{1}{2}du - tu = \frac{1}{2}ct$; facendo $\frac{1}{2}d - t = y$, e sostituendo per t il suo valore, si ha $uy = -\frac{1}{2}cy + \frac{1}{4}cd$, o sia $uy + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{4}cd$. In oltre, ponesi $u + \frac{1}{2}c = x$, e si ha $xy = \frac{1}{4}cd$, equazione all'iperbole tra gli asintoti, che si determinerà nel seguente modo.

L'equazione $\frac{1}{2}d - t = y$ dinota, che se dall'origine A delle u, e delle t, si mena AB parallela a PM, ed uguale ad $\frac{1}{2}d$, e che si tira QBC parallela ad AP, le rette QM computate in un senso opposto alle PM,

saran le y; in fatti, $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2} d - t = y$; dunque CQ è la posizione di uno degli asintoti.

La seconda equazione $u + \frac{1}{2} c = x$ significa, che se si prolunga AP verso G per quanto è $AG = \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} AR$, le rette GP, o le uguali ad esse CQ, le quali ottengonsi menando CG parallela a PM, saran le x; dunque C è il centro, e le rette CQ, CG saran gli asintoti. Onde pel metodo dato (354) si descriverà un' iperbole tra questi asintoti, e che passa per A; come appunto l'indica l'equazione $xy = \frac{1}{4} cd = \frac{1}{2} c \times \frac{1}{2} d = AG \times AB = CB \times AB$; quest' iperbole taglierà il cerchio nel chiesto punto M.

Se l' arco EO fosse maggiore di 90°, allor cadendo il suo coseno AR dal lato opposto, sarebbe negativo; dunque bisognerà supporre c negativa nelle superiori equazioni. E se l' arco EO fosse maggiore di 180°, e minore di 270°, come appunto è l' arco $EOE'O'$, il suo seno, e 'l suo coseno sarebber negativi; dunque bisognerà cambiare i segni di c, e di d nelle stesse superiori equazioni.

Se si prolunga GC di quanto è $CG' = CG$, e CB di quanto è $CB' = CB$, e menate $B'A'$, e $G'A'$ rispettivamente parallele a CG', e CB', tra le rette CG', e CB' prolungate indefinitamente, come asintoti, si descrive un' iperbole, che passa per A', essa incontrerà il cerchio in due punti A', M', nel modo appunto come

la prima l' incontra nei due punti M, ed M''. Or di questi quattro punti, i tre M, M', ed M'' meritano di essere osservati; perchè il primo M esibisce l'arco EM, per terza parte di EO; il secondo M' assegna l' arco $E'M'$, per terza parte di $E'O$, supplemento di EO; e finalmente il terzo M'' determina $E'M''$, per terza parte di $EOE'O'$, cioè dell' arco EO accresciuto della semiperiferia.

In fatti, l' arco $E'O$ ha, come l' arco EO, per seno, e coseno le rette RO, ed AR; però con questa sola differenza, che AR considerata come coseno dell'arco $E'O$ maggiore di 90°, è negativa; dunque per aver la soluzione in questo secondo caso, devesi nella superiore soluzione supporre solo, che c è negativa: or questo cambiamento affetta soltanto la seconda equazione, col cambiare la sua ridotta $xy = \frac{1}{4}cd$, in $xy = -\frac{1}{4}cd$, equazione che appartiene all' iperbole $A'M'$, e che dunque fa vedere, che la soluzione di questo caso sarà esibita dall' intersezione M' di questo ramo di curva, col cerchio. Si vedrà subito perchè questo punto non è A'. Dunque $P'M'$ è il seno del chiesto arco, in questo secondo caso; onde un tal arco è $E'M'$, cioè $E'M'$ è la terza parte di $E'O$.

In riguardo alla terza soluzione, se aumentasi l' arco EO di 180°, lo che si farà prendendo $E'O' = EO$, allora l' arco $EOE'O'$ tien per seno, e coseno le rette $R'O'$, AR', che sono necessariamente uguali alle altre RO, ed AR, però con questa sola differenza, che cadendo ambedue da lati opposti a quest' ultime, esse sono negative; dunque per aver la soluzione conveniente á

questo caso, debbonsi solo suppor negative le c, e d. Ora un tal cambiamento non altera l'equazione $xy = \frac{1}{4}cd$, in cui entrano c, e d; dunque la prima iperbole offre colla sua intersezione M'', la soluzione di questo terzo caso; quindi $P''M''$ è il seno dell'arco cercato in questo terzo caso; onde un tal arco è $E'M''$, cioè, che $E'M''$ è la terza parte di $EOE'O'$.

Così la stessa soluzione, che serve a trovar la terza parte di un dato arco a, serve anche a trovar la terza parte di $180^\circ - a$, e la terza parte di $180^\circ + a$.

Quì si può applicare lo già detto (400) sulle differenti sezioni coniche, che possonsi impiegare per costruire, combinando come più piace le due equazioni in u, e t.

In riguardo alla quarta intersezione si è detto, che essa accadeva in A', lo che è chiaro, perchè l'iperbole si è fatta passare per tal punto, che è determinato facendo $B'A' = AB$, e $B'C = CB$, lo che dinota, che $AR' = AR$, ed $R'A' = RO$; per cui il punto A' appartiene alla circonferenza. Ma nulladimeno esso non offre una nuova soluzione, perchè è determinato con operazioni indipendenti dalle equazioni, che han data la soluzione.

403. Se dall'equazione $2tu + ct = du$ trovata di sopra, si deduce il valore di t, per sostituirlo nell'equazione $u^2 + t^2 = r^2$, la qual si è avuta nello stesso tempo; dopo di aver sostituito per $c^2 + d^2$, il suo valore r^2, trasposto, e ridotto, si avrà $4u^4 + 4cu^3 - 3r^2u^2 - 4cr^2u - r^2c^2 = 0$, o pure $4u^3(u + c) - 3r^2u \times (u + c) - cr^2(u + c) = 0$, la qual divisa per $u + c$, ne dà $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, equazione,

che deve contenere gli esaminati tre casi; dunque essa aver deve tre radici. Or la costruzione fa vedere, che u in fatti ha tre valori, cioè, AP, AP', ed AP'', e che i due ultimi cadendo da lati opposti al primo, sono negativi; dunque questa equazione ha tre radici, o sia valori di u, di cui due sono negativi, cioè $u = -AP'$, $u' = -AP''$; e'l terzo $u = AP$, è positivo.

404. L'equazione $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, o sia $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, è nel caso irriducibile; e poichè le sue radici sono i rispettivi coseni di $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180^\circ - EO)$, ed $\frac{1}{3}(180^\circ + EO)$; perciò si possono avere le tre radici di un' equazione cubica, che trovasi nel caso irriducibile, per mezzo delle tavole dei seni, con una sufficiente, e sollecita approssimazione: eccone il metodo. Si rappresenti con $u^3 - pu + q = 0$, qualunque equazione cubica, nel caso irriducibile; paragonando questa, coll'altra $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, si ha $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, e $-\frac{cr^2}{4} = q$; dalla prima di queste due ultime equazioni deducesi $r = \sqrt{\frac{4}{3}p}$, e dalla seconda si ha $c = -\frac{3q}{p}$. Si rappresenti per R il raggio delle tavole; il quarto proporzionale in ordine ad r, c, ed R, o sia in ordine a $\sqrt{\frac{4}{3}p}$, $-\frac{3q}{p}$,

ed R, sarà il coseno, che si ha nelle tavole, dell'arco EO; questo quarto proporzionale, il quale è $\frac{3\,q\,R}{p\sqrt{\frac{4}{3}\,p}}$, rinvenuto nelle tavole, darà il seno del complemento di EO; per cui aggiungendo 90^o, al numero trovato di gradi, o, all'opposto, sottraendo un tal numero da 90^o, secondochè q sarà positiva, o negativa nell'equazione, si avrà l'arco EO, che chiamisi A; dunque nelle stesse tavole si cercheranno i coseni dei tre archi $\frac{A}{3}$, $\frac{180^o - A}{3}$, e $\frac{180^o + A}{3}$, i quali per ridursi al raggio r, si moltiplicheranno per $\frac{r}{R}$, cioè per $\frac{\sqrt{\frac{4}{3}\,p}}{r}$, perchè per ridurre, per esempio, cos. $\frac{A}{3}$ preso nelle tavole, bisogna far questa proporzione R : cos. $\frac{A}{3}$ :: r : al coseno dello stesso arco, nel cerchio che ha per raggio r, cioè ad AP, o sia u; dunque i tre valori di u saranno

$$u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\,p}}{R}\ \text{cos.}\ \frac{A}{3},\quad u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\,p}}{R}\ \text{cos.}\ \frac{180^o - A}{3},$$

ed $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\,p}}{R}$ cos. $\frac{180^o + A}{3}$, nei quali bisognerà osservare di dare il segno $-$ a quelli, dei quali l'arco sarà maggiore di 90^o. Tali operazioni possonsi facilitare per mezzo dei logaritmi.

405. Proponesi ora questo problema più generale di quello risoluto (274). ***Da un punto*** D (fig. 65) ***dato fuori di un angolo dato*** RAP ***tirar la retta*** DP ***in modo, che il suo segmento*** RP ***intercetto tra i lati di quell' angolo, sia uguale ad una retta data c.***

Dal punto D si menino DS perpendicolare ad AP prolungata, e DO parallela ad AR; e dal punto R si tiri ad AP anche la perpendicolare RN. Le rette DO, DS, OS, ed AO son cognite, per esser dati sì il punto D, che l'angolo RAP, o sia il suo supplemento RAN, o pure l'uguale a questo DOS. Perciò pongansi $DO = r$, $DS = p$, $OS = q$, $AO = d$., la retta, cui dev' essere uguale RP, $= c$; e le incognite AP, AR rispettivamente uguali ad u, e t.

Ciò stabilito, dai triangoli simili DSO, RNA si hanno $DO : DS :: AR : RN$, e $DO : OS :: AR : AN$, cioè $r : p :: t : RN = \frac{pt}{r}$, ed $r : q :: t : AN = \frac{qt}{r}$; dunque $NP = \frac{qt}{r} + u$. Ora dal triangolo rettangolo RNP si ottiene $PN^2 + NR^2 = RP^2$, cioè, $\frac{q^2t^2}{r^2} + \frac{2\,qut}{r} + u^2 + \frac{p^2\ t^2}{r^2} = c^2$; o sia $\frac{(q^2 + p^2)\ t^2}{r^2} + \frac{2qut}{r} + u^2 = c^2$, o pure $t^2 + \frac{2qut}{r} + u^2 = c^2$, perchè nell'altro triangolo rettangolo DSO si ha $p^2 + q^2 = r^2$.

Ma come sonovi due incognite, così occorrono due equazioni; per cui considerar si devono i triangoli simili DOP, RAP, dai quali si ha $DO : RA :: OP : PA$, cioè, $r : t :: d + u : u$, onde $ru = td + tu$.

e queste sono le due equazioni, che bisogna costruire, per risolvere il problema, la prima delle quali (381) appartiene all' ellisse, e la seconda all' iperbole.

Per costruir la prima, si fa $t + \frac{qu}{r} = y$, ed oprando come nei simili superiori esempj, si avrà $y^2 - \frac{q^2 u^2}{r^2} + u^2 = c^2$, o sia $y^2 + \frac{p^2 u^2}{r^2} = c^2$, perchè $- \frac{q^2 u^2}{r^2} + u^2 = \frac{r^2 u^2 - q^2 u^2}{r^2} = \frac{(r^2 - q^2) u^2}{r^2} = \frac{p^2 u^2}{r^2}$. Si fa $u = \frac{l}{n} x$ (389), e si ha $y^2 + \frac{p^2 l^2 x^2}{r^2 n^2} = c^2$, o sia $y^2 = c^2 - \frac{p^2 l^2 x^2}{r^2 n^2} = c^2 - \frac{p^2 x^2}{n^2}$, (col supporre l' indeterminata $l = r$, lo che è ben regolare), o pure $y^2 = \frac{p^2}{n^2} \left(\frac{c^2 n^2}{p^2} - x^2 \right)$. Col paragonare all' equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{4} a^2 - x^2 \right)$, si troverà che i due diametri conjugati a, e b sono $a = \frac{2cn}{p}$, e $b = 2c$. Si determini ora la posizione di essi, e 'l valore di n; ma per meglio conoscere l' uso di questa costruzione, concepiscasi prima, che dando successivamente ad u, o sia AP diversi valori, si menino ad AR le parallele PM, che pareggino i corrispondenti valori di t, lo che produrrà la curva, di cui si sta considerando l'equazione. Ciò posto, prendasi su di AP la AK ad arbitrio, e da K si meni KL parallela a PM, e che stia ad AK :: $q : r$; ma per i triangoli simili AKL, ed APQ si ha

$PQ : PA :: KL : KA$, dunque $PQ : PA :: q : r$, per cui $PQ = \frac{q \times PA}{r} = \frac{qu}{r}$, e $QM = PM + PQ = t + \frac{qu}{r} = y$; quindi la AQ in cui terminano le y, sarà la posizione di uno dei due diametri conjugati, e propriamente di quello, in cui debbonsi computare le x, e per aver l'origine di queste, devesi conseguentemente, impiegar l'equazione $u = \frac{l}{n} x = \frac{r}{n} x$, in cui funziona x, e la quale supponendo $x = 0$, diviene $u = 0$; lo che dinota, che $x = 0$, o sia l'origine delle ascisse trovasi ove $u = 0$, cioè nel punto A, e quindi le AQ sono le x; onde l'equazione $u = \frac{rx}{n}$, diviene $AP = \frac{r \times AQ}{n}$, da cui si ha $n \times AP = r \times AQ$, o sia $r : n :: AP : AQ :: AK : AL$; e poichè AK si prende ad arbitrio, perciò può farsi $= r$, onde si ha $r : n :: r : AL$, e quindi $n = AL$.

Dunque devesi solamente descrivere (316) un'ellisse, di cui due diametri conjugati comprendano un angolo uguale ad AQM, e dei quali quello che ha la posizione AQ, sia $= \frac{2cn}{p}$, e l'altro che ha la posizione AR, sia $= 2c$. Questa ellisse sarà il luogo della prima equazione. Ma può di passaggio osservarsi, che questa ellisse è precisamente quella, che descriverebbe il punto medio di una retta uguale a $2RP$, i cui estremi scorrano lungo dei lati AP, AR; qual cosa facilmente si dimostra col paragonar questa soluzione, a quella esi-

bita (397), e col supporre $g = h = c$. Quando l'angolo RAP è retto, l'ellisse diviene un cerchio del raggio c.

Quindi riman solo a costruir la seconda equazione $ru = dt + ut$, o sia $ru - ut = dt$. Ora, secondo gli antecedenti principj, si fa $r - t = y'$, ed indi $u + d = x'$, lo che cambia tale equazione in $x'y' = rd$, la qual riguarda l' iperbole tra i suoi asintoti. Onde, in vigore dell' equazione $r - t = y'$, si prenderà su di AR la $AT = r = OD$, cioè, che si menerà per D la DTV parallela ad AP; allora le rette VM saranno le y', che si computeranno da V verso M, cioè in senso opposto a PM, perchè $VM = PV - PM = r - t = y'$. Indi, in virtù dell' equazione $u + d = x'$, si prenderà $OA = d$, cioè, che si menerà pel punto D la DO parallela ad AT; allora le rette DV saranno x', perchè $DV = OP = OA + AP = d + u = x'$. Dunque si costruirà (354) tra le rette DO, e DV come asintoti, un'iperbole che passi per A, perchè si ha $x'y' = rd = AO \times AT$; quest' iperbole incontrerà l'ellisse nei due punti M, ed M', per i quali conducendo MR, ed $M'R'$ parallele ad AP, si avran due punti R, ed R' per i quali, e per D conducendo le DRP, e $DP'R'$, le parti PR e $P'R'$ di queste, tra i lati degli angoli uguali RAP, $R'AP'$ intercette, saranno uguali alla data retta c.

Se prolungando gli asintoti, descrivesi l' iperbole opposta $M''A'M'''$ (*fig.* 66), nel caso in cui essa incontrerà l' ellisse, la medesima determinerà due nuovi punti $M''M'''$, per i quali menando le parallele ad AP, si avran sopra di AT due nuovi punti R'', R''', per i

quali, e per D tirando due rette, le parti di queste comprese tra i lati dell'angolo TAS, pure saranno uguali alla data retta c. In generale, questo è il modo da tenersi per risolvere i problemi determinati, i quali però non eccedano il quarto grado.

406. Se il problema si fosse risoluto col servirsi di una sola incognita, nondimeno si sarebbe potuto impiegar lo stesso metodo, con introdurre una nuova incognita. Per esempio, se propongasi di *trovare un cubo, che sia ad un dato cubo* a^3, *in data ragione di* m, *ad* n; chiamando u il lato di tal cubo, si avrà $u^3 : a^3 :: m : n$, onde $nu^3 = ma^3$.

Per costruir quest' equazione, si supporrà $u^2 = at$, allor l' equazione si muterà in $natu = ma^3$, o sia $tu = \frac{ma^2}{n}$. Dunque si costruirà la parabola, che ha per equazione $u^2 = at$, e l'iperbole che ha per equazione $tu = \frac{ma^2}{n}$; l' intersezione di queste due curve, esibirà i valori di u, e t.

Se l'equazione $tu = \frac{ma^2}{n}$ si moltiplica per u, e vi si sostituisce per u^2 nuovamente il suo valore at, si avrà $at^2 = \frac{ma^2u}{n}$, o sia $t^2 = \frac{ma}{n}u$, altra equazione all'iperbole, che può costruirsi unitamente all'equazione $u^2 = at$. Si può osservar di passaggio, che queste equazioni sono le stesse, che si avrebbero cercando due medie proporzionali tra a, ed $\frac{ma}{n}$; così posson costruirsi precisamente come nel (399).

407. L' equazione $nu^3 = ma^3$ esibisce $u = \sqrt[3]{\frac{ma^3}{n}}$; vedesi dunque, che la costruzione dei radicali cubici si fa per mezzo delle sezioni coniche. Lo stesso è dei radicali biquadratici, quando essi contengono dei radicali cubici, come questo $\sqrt[4]{(a^3 \sqrt[3]{ab^2})}$; perchè se essi contengono dei radicali quadratici, come $\sqrt[4]{(a^3 \sqrt{ab})}$, o delle grandezze razionali, si costruiran sempre col cerchio; in fatti, tra a, e b trovisi la media proporzionale m, sarà $\sqrt{ab} = m$, onde $\sqrt[4]{(a^3 \sqrt{ab})} = \sqrt[4]{a^3 m}$ $= \sqrt[4]{(a^2 \times am)}$; trovisi di più tra a, ed m la media proporzionale n, sarà $am = n^2$, onde $\sqrt[4]{(a^3 \sqrt{ab})}$ $= \sqrt[4]{a^3 m} = \sqrt[4]{(a^2 \times am)} = \sqrt[4]{a^2 n^2} = \sqrt{an}$, cioè il proposto radicale esprime la media proporzionale tra a ed n.

408. Quando l'equazione determinata avrà un maggior numero di termini, si costruirà sempre in un modo analogo; per esempio, se abbiasi $u^4 + au^3 + aqu^2 + a^2ru$ $+ sa^3 = 0$, ove a, q, r, s sieno tutte grandezze note, supponendo $u^2 = at$, si avrà $a^2t^2 + a^2ut + aqu^2$ $+ a^2ru + sa^3 = 0$, o sia $at^2 + aut + qu^2 + aru$ $+ sa^2 = 0$, equazione riguardante una sezione conica; dunque, secondo gli antecedenti principj, costruiscansi quest'ultima equazione, e l'altra di supposizione $u^2 = at$, le intersezioni di queste due curve, daranno i diversi valori di u.

409. Ma introducendo nel modo suddetto, una no-

vella equazione ad arbitrio, può accadere, che le due curve non s'intersechino, benchè il problema, che avrà somministrata l' equazione, abbia una, o più soluzioni; a tal uopo, per evitar qualunque imbarazzo, si va ad esporre un metodo, ch' è applicabile a tutt' i gradi.

Suppongasi esservi l'equazione $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = 0$; si supporrà $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = a^2 t$, ove t dinota un' indeterminata, ed a, p, q dei numeri, o delle rette cognite; allor se suppongonsi dati ad u successivi diversi valori AP, AP, ec. (*fig.* 67), e che i corrrispondenti valori di t, i quali son facili ad aversi, perchè t è al primo grado, si portino (*) sotto di un angolo qualunque, che per più semplicità si può supporre retto, ne nascerà una curva; e per sapere ove questa incontra l'asse AP, bisogna supporre $t = 0$, lo che esibisce $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = 0$, cioè, l'equazione proposta; dunque le distanze AO, AO', AO'' alle quali la curva incontra l' asse, saranno i differenti valori di u.

Ma se, in vece di calcolo, vogliasi una costruzione, ciò sarà molto facile, col dare all' equazione questa forma,

$$t = \frac{u^3}{a^2} - \frac{u^2}{a} + \frac{pu}{a} - q;$$ perchè la costruzione di ciascuno dei termini $\frac{u^3}{a^2}$, $\frac{u^2}{a}$, $\frac{pu}{a}$, per ciascun valore di u dato in linee, si esegue facilmente per quel che si è detto (246).

(*) Badando di portare dalle parti opposte dell' asse AP quelli, che hanno segni contrarj.

410. Quando nel problema entra più di un' incognita, la costruzione si potrà ricondurre a quella ora esibita, riducendo tutte l'incognite ad una sola, pel metodo dato (162, e *seguenti*).

411. Se il problema è indeterminato, e che una delle due indeterminate, che entrano nell' equazione, non sorpassa il secondo grado, si potrà sempre costruire l'equazione, qualunque sia il grado, cui giunge l' altra indeterminata; col dare a questa dei valori arbitrarj, e calcolando i corrispondenti valori della prima; col fare di quella le ascisse, e di questa le ordinate di una curva. Ma se ambe le indeterminate sorpassano il secondo grado; allora per ciascun valore, che si darà ad una delle due indeterminate, bisognerà trovare i valori dell' altra, impiegando il metodo ora esposto. Non si entra in maggiori particolarità sopra le costruzioni di quest'ultima specie, perchè s' incontreranno molto raramente.

412. Prima di terminar questa terza parte, si faranno osservare anche alcuni usi dell'applicazione delle equazioni, alle curve. Poichè ogni equazione ad una sezione conica, è sempre del secondo grado; e che l'equazione la più generale di questo grado, si può sempre ridurre a questa forma $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$; ne segue, che sempre si può far passare una sezione conica per cinque punti dati, tre dei quali però comunque presi, non istieno in una linea retta, perchè una sezione conica non può in più di due punti intersecare una linea retta.

In fatti, supponghasi che A, B, C, D; E (*fig.* 68) sieno cinque punti dati, e che abbiano l'esposta condizione: se i medesimi riferisconsi alla retta AD, che

ne unisce due qualunque di essi, per mezzo delle BF, CH, EG, le quali comprendano con AD un angolo dato, o che le sieno perpendicolari, allora le distanze AF, BF, AG, GE, AH, HC, AD, che son date, posson riguardarsi come le ascisse, e le ordinate di una linea curva. Ora si dimostra, che questa linea curva ha sempre l'equazione $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$; in fatti, se pongonsi $AF = m$, $BF = n$, $AG = m'$, $GE = n'$, $AH = m''$, $CH = n''$, ed $AD = m'''$; è chiaro, che 1.° pel punto A si avrà $u = 0$, e $t = 0$, lo che riduce l'equazione ad $h = 0$. 2.° Pel punto B si avrà $u = m$, e $t = n$; lo che cambia l'equazione in $dm^2 + emn + en^2 + fm + gn = 0$, perchè $h = 0$. 3.° Pel punto E si avrà $u = m'$, $t = n'$, e quindi $dm'^2 + cm'n' + en'^2 + fm' + gn' = 0$. 4.° Pel punto C si troverà similmente $dm''^2 + cm''n'' + en''^2 + fm'' + gn'' = 0$. 5.° Finalmente pel punto D, ove $t = 0$, ed $u = m'''$, si avrà $em'''^2 + fm''' = 0$, o pur semplicemente $em''' + f = 0$. Or queste quattro equazioni perchè contengono le grandezze c, e, f, g, tutte al primo grado, perciò sarà facile, coi metodi della prima sezione, averne i valori, i quali sostituiti nell'equazione $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$, o più tosto nell'equazione $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu = 0$, perchè $h = 0$, si avranno c, e, f, g, in grandezze tutte cognite, e l'equazione si dividerà per d. Dunque allor sarà facile di costruir la curva, e di determinare se essa è ellisse, iperbole, parabola, o cerchio. Se si danno quattro punti, allora un dei coefficienti sarà arbitrario; lo che dà luogo d'imporre arbitrariamente una

condizione, e due, se si danno tre punti, e così in seguito.

Le linee curve distinguonsi in ordini relativamente al grado delle equazioni di esse. Così la linea retta è linea di prim' ordine, perchè la sua equazione è del primo grado. Le sezioni coniche, per simil ragione, sono le linee del second' ordine.

Vedesi dunque, che collo stesso metodo, si può determinar l'equazione di una linea del terz' ordine, la qual si soggetterà di passare per tanti punti, meno uno, quanti differenti termini può avere l'equazione generale di quest'ordine, a due indeterminate: similmente è negli ordini superiori.

413. Questo stesso metodo può servire a collegar con una legge approssimante, e semplice, più grandezze cognite, la cui legge fosse o molto composta, o incognita. Suppongasi, per esempio, che conoscansi tre grandezze rappresentate dalle rette CB, ED, GF (*fig.* 69), le quali grandezze dipendano dalle tre altre AB, AD, AE. Trattasi di trovare una grandezza HI intermedia alle prime, o che le sia vicina, e che derivi da AH nello stesso modo, che CB, ED, ec. derivano da AB, AD, ec.

A questo problema si può soddisfare in infiniti diversi modi, prendendo un' equazione a due indeterminate u, e t, la quale abbia almeno tanti termini differenti, quante sono le grandezze CB, ED, GF. Ma tra tutti questi differenti modi, quella che offre maggior facilità per i diversi usi, che posson farsene, consiste in considerar le rette IH come le ordinate, e le altre AH come le ascisse di una curva, che passerebbe per i dati

punti C, E, G, ec. e che avrebbe per equazione queste, $t = a + bu + cu^2 + ec$, la quale abbia tanti termini, quante sono le grandezze, o sia i punti C, E, G; allor supponendo come quî sopra, che mentre u vale AB, t valga CB; mentre u vale AD, t valga DE; mentre u vale AE, t valga GF; e così successivamente; si avran tante equazioni per determinare a, b, c, ec. quanti sono i punti. Determinati i valori di a, b, c, ec., se essi si sostituiscono nell' equazione $t = a + bu + cu^2 + ec.$, si avrà un' equazione in cui tutto sarà cognito, fuorchè u, e t. Se dunque sostituiscesi per u la distanza cognita AH, la qual conviene alla chiesta quantità HI; si avrà allora il corrispondente valore di t, cioè HI.

Da ciò vien confermato lo già detto (282). In fatti, se vogliasi imitare il contorno $ABCDEF$ (*fig.* 70); da un certo numero dei suoi punti, si abbasseranno le rispettive perpendicolari su di una data retta XZ; poi pel metodo ora esposto, si determinerà l' equazione di una curva, che passerà per tutti questi punti, e nella quale essendo t al primo grado, u monterà ad un grado dinotato dal numero di questi punti, meno uno; allor questa equazione servirà a determinare delle perpendicolari intermedie, che si accosteranno tanto più alle vere, quanto più sarà maggiore il numero dei punti A, B, C, D, ec. presi da principio.

414. In questa Terza Parte si era pensato d'introdurre varj altri oggetti, ma per non oltrepassare i giusti limiti, si è stato nell'obbligo di rimetterli alla seguente. Intanto quì si esporranno ancora alcune proposizioni, di cui vi sarà occasione di farne uso in seguito, e di cui alcune serviranno a dimostrar la regola, che si è data (*Geom.* 361. Problema VI.) per determinare gli angoli di un triangolo sferico, quando sono dati i tre lati.

415. Si rammenti (*Geom.* 284, 285, e 278), che se a e b rappresentano due angoli, o due archi, si ha sen. $(a+b) = \frac{\text{sen. } a \cos. b + \text{sen. } b \cos. a}{r}$,

e cos. $(a+b) = \frac{\cos. a \cos. b - \text{sen. } a \text{ sen. } b}{r}$,

o pur supponendo per più facilità $r = 1$,

1.° sen. $(a+b) = \text{sen. } a \cos. b + \text{sen. } b \cos. a$.

2.° cos. $(a+b) = \cos. a \cos. b - \text{sen. } a \text{ sen. } b$.

3.° sen. $(a-b) = \text{sen. } a \cos. b - \text{sen. } b \cos. a$.

4.° cos. $(a-b) = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b$.

5.° tang. $a = \frac{r \text{ sen. } a}{\cos. a} = \frac{\text{sen. } a}{\cos. a}$.

6.° cot. $a = \frac{r \cos. a}{\text{sen. } a} = \frac{\cos. a}{\text{sen. } a}$, supponendo sempre il raggio $= 1$, come si farà da ora innanzi.

416. Ciò posto, se il valore di sen. $(a+b)$ si divide per quello di cos. $(a+b)$, si avrà $\frac{\text{sen. }(a+b)}{\text{cos. }(a+b)}$, cioè, tang. $(a+b) = \frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{cos. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } a \text{ sen. } b} =$

$$\frac{\frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} + \frac{\text{sen. } b}{\text{cos. } b}}{1 - \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\text{cos. } a \text{ cos. } b}},$$ qual cosa si ottien dividendo il numeratore, e 'l denominatore del secondo membro per cos. a cos. b; dunque tang. $(a+b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$.

Se, al contrario, dividesi il valore di cos. $(a+b)$ per quello di sen. $(a+b)$, si avrà $\frac{\text{cos. }(a+b)}{\text{sen. }(a+b)}$, o sia cot. $(a+b) = \frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } a \text{ sen. } b}{\text{sen. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } b \text{ cos. } a}$

$$= \frac{\frac{\text{cos. } a}{\text{sen } a} - \frac{\text{sen. } b}{\text{cos. } b}}{1 + \frac{\text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{sen. } a \text{ cos. } b}},$$ qual cosa si ha dividendo il numeratore, e 'l denominatore del secondo membro per sen. a cos. b; dunque cot. $(a+b)$ $= \frac{\text{cot. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{cot. } a \text{ tang. } b}$.

Se similmente dividesi il valore di sen. $(a-b)$, per quello di cos. $(a-b)$; e quello di cos. $(a-b)$, per l'altro di sen. $(a-b)$,

oprando dell'istesso modo, si avrà tang. $(a-b)$ $= \frac{\text{tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{tang. } a \text{ tnag. } b}$, e cot. $(a - b)$ $= \frac{\text{cot } a \text{ tang. } b}{1 - \text{cot. } a \text{ tang. } b}$.

417. I valori di sen. $(a+b)$, cos. $(a+b)$, e tang. $(a+b)$, che sonosi ora esposti, posson servire a trovar facilmente i seni, coseni, e tangenti degli archi moltiplici di un arco dato, e per conseguenza le equazioni, che serviranno a dividere un angolo in più parti uguali. Non deve farsi altro, che supporre successivamente $b = a$, $= 2a$, $= 3a$; e così in seguito.

Per esempio, supponendo $b = a$, si avrà sen. $2a = 2$ sen. a cos. a, e cos. $2a =$ cos. a cos. $a -$ sen. a sen. $a =$ cos.^{2} $a -$ sen.^{2} a, $= 1 - 2$ sen.^{2} a, cui perviensi col sostituire per cos.^{2} a, il suo valore $1 -$ sen.^{2} a. Supponendo $b = 2a$, si avrà sen. $3a =$ sen. a cos. $2a$. $+$ sen. $2a$ cos. a, e cos. $3a =$ cos. $2a$ cos. $a -$ sen. $2a$ sen. a. Or le due precedenti equazioni esibiscono i valori di sen. $2a$, e di cos. $2a$; se dunque essi sostituisconsi in questi, si avranno i valori di sen. $3a$, e cos. $3a$ espressi per i seni, e coseni dell' arco semplice a. Similmente si troveranno i valori di

sen. $4a$, e cos. $4a$; di sen. $5a$, e cos. $5a$; e così in seguito. Si procederà in simil modo per aver tang. $2a$, tang. $3a$, ec., impiegando la formola, che esibisce tang. $(a + b)$, e supponendo successivamente $b = a$, $= 2a$, $=$ ec.

418. Se sommansi insieme i valori di sen. $(a+b)$, e di sen. $(a-b)$, si avrà sen. $(a+b)$ $+$ sen. $(a - b) = 2$ sen. a cos. b, per cui sen. a cos. $b = \frac{1}{2}$ sen. $(a + b) + \frac{1}{2}$ sen. $(a - b)$. Sommando similmente il valore di cos. $(a + b)$, con quello di cos. $(a - b)$, si troverà 2 cos. a cos. $b =$ cos. $(a + b)$ $+$ cos. $(a - b)$, o sia cos. a cos. $b =$ $\frac{1}{2}$ cos. $(a+b) + \frac{1}{2}$ cos. $(a - b)$. Al contrario, sottraendo il valore di cos. $(a + b)$, da quello di cos. $(a - b)$, si troverà 2 sen. a sen. $b =$ cos. $(a-b)$ $-$ cos. $(a+b)$, e quindi sen. a sen. $b = \frac{1}{2}$ cos. $(a-b) - \frac{1}{2}$ cos. $(a+b)$.

419. Se pongonsi $a + b = m$, ed $a - b$ $= n$, col sommare, sottrarre, e poi dividendo per 2, si avranno $a = \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} n$,

e $b = \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} n$, da cui si dedurranno facilmente le ultime formole, che or sonosi rinvenute: cioè,

$$1.^{\circ} \operatorname{sen}.m + \operatorname{sen}.n = 2 \operatorname{sen}.\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n\right) \times \cos.\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n\right).$$

$$2.^{\circ} \cos.m + \cos.n = 2 \cos.\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n\right) \times \cos.\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n\right).$$

$$3.^{\circ} \cos.n - \cos.m = 2 \operatorname{sen}.\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n\right) \times \operatorname{sen}.\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n\right).$$

Tutte queste proposizioni saranno utilissime; e vedesi ora con quanta facilità esse col calcolo si trovano, e si dimostrano. L' uso di esse presentemente sarà limitato alla dimostrazione della regola esposta (*Geom.* 361. *Probl.* VI.).

420. Sia dunque ABC (*fig.* 71) un triangolo sferico, ed AD un arco di cerchio massimo abbassato dall' angolo A, perpendicolarmente sul lato opposto BC, su del quale si prenda $BE = BA$; e si immagini l'arco AE di cerchio massimo passare pel suo punto medio O, e pel punto B, e l' altr' arco BO di cerchio massimo dividere l' angolo ABC in due parti ugnali.

Ciò posto, nel triangolo EBO, col sup-

porre il raggio $= 1$, si avrà (*Geom.* 349), 1: sen. BE, o sen. AB :: sen. OBE, o sen. $\frac{1}{2}$ ABC: sen. OE; dunque sen. OE, o sen. $\frac{1}{2}$ AE $=$ sen. $AB \times$ sen. $\frac{1}{2}$ ABC; o pur quadrando, sen.^{2} $\frac{1}{2}$ AE $=$ sen^2 $AB \times$ sen.^{2} $\frac{1}{2}$ ABC; or si è (417) veduto, che cos. $2a$ $= 1 - 2$ sen.^{2} a, o pur facendo $2a = m$, cos. $m = 1 - 2$ sen.^{2} $\frac{1}{2}$ m; dunque sen^2 $\frac{1}{2}$ m $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. m; per cui in vece di sen.^{2} $\frac{1}{2}$ AE, si può sostituire $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. AE, onde si avrà $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. AE $=$ sen.^{2} $AB \times$ sen.^{2} $\frac{1}{2}$ ABC; or (*Geom.* 357) nel triangolo ABC si ha cos. BD: cos. CD, o sia cos. $(BC - BD)$:: cos. AB: cos. AC; cioè cos. BD : cos. BC cos. BD + sen. BC sen. BD :: cos. AB: cos. AC, onde cos. BD cos. AC $=$ cos. AB cos. BC cos. BD + cos. AB sen. BC sen. BD, da cui si ha sen. BD ....

$$= \frac{\text{cos. } BD \text{ cos. } AC - \text{cos. } AB \text{ cos. } BC \text{ cos. } BD}{\text{cos. } AB \text{ sen. } BC}.$$

Per lo stesso principio, nel triangolo BAE

si avrà cos. BD: cos. DE, o sia cos. $(AB - BD)$ :: cos. AB: cos. AE; cioè, cos. BD: cos. AB cos. BD + sen. AB sen. BD :: cos. AB : cos. AE; dunque cos. BD cos. AE = cos. AB cos. AB cos. BD+cos. AB sen. AB sen. BD, da cui si ha sen. BD = ...

$$\frac{\text{cos. } BD \text{ cos. } AE - \text{cos.}^2 AB \text{ cos. } BD}{\text{cos. } AB \text{ sen. } AB};$$ pareggiando questi due valori di sen. BD, ed indi sopprimendo il comun fattore $\frac{\text{cos. } BD}{\text{cos. } AB}$, dopo delle ordinarie operazioni, risulterà cos. AE =

$$\frac{\text{sen. } AB \text{ cos. } AC - \text{cos. } AB \text{ sen. } AB \text{ cos. } BC + \text{cos}^2 AB \text{ sen. } BC}{\text{sen. } BC};$$

sostituendo questo valore nell' equazione $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. AE=sen.^{2} AB sen.^{2} $\frac{1}{2}$ ABC, si avrà $\frac{1}{2}$ —

$$\frac{\text{sen. } AB \text{ cos. } AC + \text{cos. } AB \text{ sen. } AB \text{ cos. } BC - \text{cos.}^2 AB \text{ sen. } BC}{2 \text{ sen. } BC}$$

= sen.^{2} AB sen.^{2} $\frac{1}{2}$ ABC; togliendo i denominatori, ed indi sostituendo in sen. BC — cos.^{2} AB sen. BC, o sia sen. BC (1 — cos.^{2} AB), in vece di 1 — cos.^{2} AB, il suo valore sen.^{2} AB, e poi dividendo per sen. AB; si avrà sen. BC sen. AB — cos. AC + cos. AB cos. BC = 2 sen. AB × sen. BC sen.^{2}

$\frac{1}{2}$ ABC; ora (415) cos. AB cos. BC+sen. BC sen. AB = cos. ($BC - AB$); dunque cos. ($BC - AB$) − cos. AC = 2 sen. AB sen. BC sen.^{2} $\frac{1}{2}$ ABC; ma (419) cos. ($BC - AB$) − cos. AC = ...
2 sen. $\left(\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} CB - \frac{1}{2} AB\right)$ sen. $\left(\frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB\right)$, che è lo stesso di ....
2 sen. $\left(\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB - AB\right) \times$ sen. $\left(\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB - BC\right)$, o pur che è lo stesso di 2 sen. $\left(\frac{1}{2} S - AB\right)$ $\times$ sen. $\left(\frac{1}{2} S - BC\right)$, col porre la somma dei tre lati $= S$; dunque 2 sen. $\left(\frac{1}{2} S - AB\right)$ $\times$ sen. $\left(\frac{1}{2} S - BC\right)$ = 2 sen. AB sen. BC sen.^{2} $\frac{1}{2}$ ABC; da cui, dopo di aver diviso per 2, si rileva sen. $AB \times$ sen. BC: sen. $\left(\frac{1}{2} S - AB\right) \times$ sen. $\left(\frac{1}{2} S - BC\right)$ :: 1, o sia r^2: sen.^{2} $\frac{1}{2}$ ABC; qual cosa, impiegando i logaritmi, esibisce la regola, che cercavasi di dimostrare.

Fine della seconda Sezione, e della terza Parte.

M.o ai Pietro inc.

Tav. III.a
46.
48.
50.
52.
54.
59.
di Pietro inc.

66.

70.

69.

...M. di Pietro inc